

Leçon N° 2 13 : Espace de Hilbert. Exemples d'applications.

$H = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\| \cdot \|$ est un $\| \cdot \|$ -espace réel ou $\mathbb{C}$. $n \in \mathbb{N}^*$

I) Introduction : Espace préhilbertien

1) Produits scalaires et produits hermitiens.

Définition 1 : On définit le produit scalaire ($\| \cdot \|$) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (si $\mathbb{R}$) ou $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (si $\mathbb{C}$) comme étant une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) linéarité à gauche : $\forall (x, y, z) \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

2) symétrie hermitienne : $\forall (x, y) \in H, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

3) défini positif : $\forall x \in H, \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Définition 2 : On appelle espace préhilbertien de carré ($H, \langle \cdot, \cdot \rangle$) ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire / hermitien.

À partir de maintenant, on considère un espace préhilbertien.

Exemples 3 : 1) $H = \mathbb{R}^n$ est préhilbertien pour le produit hermitien

$$\langle x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

2) $\mathcal{C}^0([0, 1])$ est préhilbertien pour $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$.

3) $\forall n, \| \cdot \|_n$ est préhilbertien avec $\langle A, B \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr}(A^* B)$.

4) $\ell^2(\mathbb{N})$ avec $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}$.

2) Intégrale de Cauchy-Schwarz

Proposition 4 : (Inégalité de Cauchy-Schwarz) : $\forall (x, y) \in H,$

$$| \langle x, y \rangle |^2 \leq \| x \|^2 \| y \|^2 \text{ avec égalitéssi } x \text{ et } y \text{ sont liés}$$

Corollaire 5 : $\| \cdot \| : H \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme sur H

$$x \mapsto \langle x, x \rangle$$

date associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposition 6 : (Identité du parallélogramme) : $\forall (x, y) \in H,$

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Proposition 7 : Une norme sur H est associée à un produit scalaire. Or elle vérifie l'identité du parallélogramme.

3) Orthogonalité.

Définition 8 : 1) Soit $(x, y) \in H,$ on dit que x est orthogonal à y

$$(\text{noté } x \perp y) \text{ lorsque } \langle x, y \rangle = 0.$$

2) Soit $A \subset H, A^\perp = \{ x \in H, \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0 \}$

$$= \bigcap_{y \in A} \text{Ker}(\langle \cdot, y \rangle)$$

Proposition 9 : Soient $A, B \subset H.$

1) $A^\perp \subset B^\perp$ si $A \supset B$

2) $B \subset A \implies A^\perp \subset B^\perp$

3) $A^\perp = \text{Ker}(\langle \cdot, A \rangle)^\perp = A$

4) $A \cap A^\perp = \{ 0 \}$.

5) $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Exemple 10 : Soit $\mathbb{R}^n, H = \mathbb{R}^n, A^\perp = \{ 0 \}$ et donc $(A^\perp)^\perp = \mathbb{R}^n$.

Théorème 11 : (Pythagore) Soient $x, y, \dots, z_n \in H,$ deux à deux orthogonaux. On a $\| \sum_{i=1}^n x_i \|^2 = \sum_{i=1}^n \| x_i \|^2$.

4) Première application : Matrice et déterminant de Gram.

Définition 12 : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in H^n$.

On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ la matrice $(G_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice noté $\Delta(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 13 : Toute matrice de Gram est hermitienne positive. Réciproquement : toute matrice hermitienne positive est une matrice de Gram. De plus, la matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ est nulle

$x_1, \dots, x_n$ est définiessi $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est linéaire.
Théorème 14: Soit V un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$.
 Soit $x \in \mathbb{C}^n$, alors la norme de x à $\sqrt{\langle x, x \rangle}$.
 $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$

II) Espaces de Hilbert.

1) Définitions et exemples

Définition 15: On dit que H est un espace de Hilbert lorsque c'est un préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire.
Proposition 16: Tout préhilbertien de dimension finie est un Hilbert.
 On parle d'espace euclidien lorsque $H = \mathbb{R}^n$, hermitien lorsque $H = \mathbb{C}^n$.

Exemples 17: 1) $\ell^2(\mathbb{N})$ est un Hilbert.

2) Pour $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ espace mesuré, $\ell^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est un Hilbert.
 Autre exemple 18: $\mathcal{C}^0([0, 1])$ n'est pas de Hilbert.

2) Théorème de projection sur un sous-espace fermé.

Théorème 19: Soit H un Hilbert. Soient C un sous-espace fermé non vide.

$\forall x \in H, \exists ! p \in C, \|x - p\| = d(x, C)$

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant:
 $\forall c \in C, \operatorname{Re} \langle x - p, c - p \rangle \leq 0$ (cf annexe 1)

Proposition 20: $\mathbb{R}$ application $p_C: H \rightarrow C$ est 1-linéaire.

Théorème 21: p_C est une application bilinéaire continue et

$\forall x \in H, p_C(x)$ est l'unique point $y \in C$ tel que $x - y \perp C$.

Corollaire 22: Soit F un sous-espace de H , $H = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 23: 1) $\forall G \subseteq H$ sois, on a $G^\perp = (G^\perp)^\perp$

2) $G = H$ si et seulement si $G^\perp = \{0\}$

Corollaire 24: (Représentation de Riesz): L'application $J: H \rightarrow H'$ est une isométrie surjective. En particulier $H \cong H'$.

Application 25: $\ell^2(\mathbb{R})$ est même que $\ell^2(\mathbb{R})$.

Application 26: Soit $\alpha \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en α .

$\exists !$ vecteur $\nabla f(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ (gradient de f en α) tel que $D_\alpha f = \langle \cdot, \nabla f(\alpha) \rangle$

Application 27: $\forall T \in \mathcal{L}_c(H), \exists ! T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $\forall (x, y) \in H, \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$

De plus, $\|T^*\| = \|T\|$. (T^* est l'adjoint de T)

III) Bases orthonormales.

1) Familles orthonormales.

Définition 28: Soit $(e_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormale de H .

1) Orthogonalité: Soit $V(i, j) \in \mathbb{R}, i, j \in I, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.

2) Orthonormalité: Soit $V(i, i) \in \mathbb{R}, i \in I, \langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Proposition 29: Toute famille orthonormale est libre.

Proposition 30: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de $H, F = \operatorname{Vect}(e_i)_{i \in I}$.
 Alors $\forall x \in H, p_F(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$

Proposition 31: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de H . Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale.

Proposition 32: (Gram-Schmidt): Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre de H .

$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille orthonormale de H log $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, e_i = \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.

Algorithme 33: $e_0 = f_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = \frac{f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \langle f_n, e_i \rangle e_i}{\|f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \langle f_n, e_i \rangle e_i\|}$.

2) Base hilbertienne

Définition 34: $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H lorsque elle est orthonormée et totale (i.e. Vect (e_i) est dense dans H).

Exemple 35: 1) En dimension finie, toute base orthonormale est hilbertienne.

2) $(\delta_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

3) $e_n(x) = e^{2i\pi n x}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_T^2(M)$.

Proposition 36: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée de H . Soit équivalemment: 1) $(e_i)_{i \in I}$ base hilbertienne

2) (Parseval) $\forall v \in H, \|v\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle v, e_i \rangle|^2$

3) $\forall (x, y) \in H^2, \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$

Théorème 37: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de H , alors $\forall x \in H, x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Proposition 38: H est séparable si H admet une base hilbertienne dénombrable.

Proposition 39: L'application $x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de H dans $\ell^2(I)$.

IV) Séries de Fourier dans $(\ell^2(2\pi))$

Notation 40: $\ell^2_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f \in \ell^2(\mathbb{R}) \mid 2\pi - \text{périodique}\}$.

Proposition 41: $\forall u \in \mathbb{C}$, on pose en $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{int}}$
 $f \mapsto e^{iuf}$

(e_u) est une base hilbertienne de $\ell^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Définition 42: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\text{def } C_n \in \ell^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, on définit en $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{int}}$
 $\text{le } n\text{-ième coefficient de Fourier de } f$
 $= \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$

Proposition 43: Pour $f \in \mathcal{C}^2_0(\mathbb{R})$, $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, e_n \rangle e_n$ et

(Parseval) $\|f\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, e_n \rangle|^2$

Application 44: $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2q) = (-1)^{q-1} \frac{(2\pi)^{2q}}{2 \times (2q)!} b_{2q}$

où b_n est le n -ième coefficient de Bernoulli définie par:

Si $f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$, $b_0 = 1$

alors $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$.

Notation 45: $\mathcal{BL}^2 := \{u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \mid \langle u, u \rangle = 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{R} \setminus I\}$.

Proposition 46: $\mathcal{BL}^2$ est un Hilbert

Proposition 47: Si $u \in \mathcal{BL}^2$, alors $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\|u\|_{\mathcal{BL}^2} \leq \|u\|_2$.

Proposition 48: (Le sup est une base hilbertienne de $\mathcal{BL}^2$)

Théorème 49: L'application $U: \mathcal{BL}^2 \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$

$u \mapsto (u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$

est unitaire et $\forall u \in \mathcal{BL}^2, u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n) e^{inx} (2-\epsilon)$

La série convergeant uniformément et dans $\ell^2(\mathbb{R})$

des
points

des
1