

Leçon N° 209 : Approximation d'une fonction par des

I) Approximation par la convolution

1) Translation

Définition 1: Soit $p \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$, la translation par a dans $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$ est l'application $T_a : \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$ $f \mapsto f(\cdot - a)$.

Lemme 2: L'ensemble $\mathcal{E}_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions étagées à support compact est dense dans $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall p \in [1, +\infty[$.

Proposition 3: Soit $p \in [1, +\infty[$, $\forall g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $\|T_a g - g\|_p \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$.

Contre exemple: Soit $p = +\infty$, c'est faux. $g = 1_{[0,1]}$, on a $\forall a > 0$, $\|T_a g - g\|_\infty = 1$.

2) Produit de convolution

Définition 5: Soient f et $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables. Lorsque cela est bien défini, le produit de convolution de f et g est la fonction $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt$.

Proposition 6: Soient $p, q \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$.

Alors $f * g$ est uniformément continue, bornée et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Proposition 7: Si $f * g$ est bien définie, $\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp } f + \text{supp } g$.

Proposition 8: Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ avec $g \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^1_{loc}$, alors

$$f * g \in \mathcal{C}_c^\infty \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^d, \partial^\alpha (f * g) = (f * \partial^\alpha g)(x)$$

fonctions régulières Exemples d'applications

2) Suites régulières

Définition 9: Une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$1) \forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} p_n(x) dx = 1$$

$$2) \forall \delta > 0, \int_{\|x\| \geq \delta} p_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

est appelée suite régulière.

Exemple 10: Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$

$$\text{et } p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mapsto \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{q_n} & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(p_n) est une suite régulière.

Proposition 11: Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } \varphi \subseteq \overline{B}(0,1)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n : x \mapsto n^d \varphi(nx)$. Alors (p_n) est une suite régulière.

Proposition 12: Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit (χ_n) une suite régulière.

$(f * \chi_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f .

Proposition 13: Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty[$, soit (p_n) une suite régulière.

Alors $(f * p_n)$ converge dans $\mathcal{L}^p$ vers f .

Corollaire 14: $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall p \in [1, +\infty[$.

Corollaire 15: Soit $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx = 0, \text{ alors } f = 0.$$

II) Approximation par des fonctions polynomiales

1) Formule de Taylor

Proposition 16: Soient $n \in \mathbb{N}$ et F une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Soient $a \in I$ tel que $F^{(n+1)}(a)$ existe. Alors:

$$F(a+h) = F(a) + h F'(a) + \frac{h^2}{2!} F''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

Exemple 17: On donne quelques développements limités de fonctions en 0:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + o(x^n),$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k + o(x^n).$$

2) Théorème de Stone-Weierstrass

Théorème 18 (Weierstrass) Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. f est d'approximation uniforme par I d'une suite de fonctions polynomiales.

Définition 19: Un sous-algèbre A de $\mathcal{C}^0(X)$ en dire:

- séparable: lorsque $N(x, y) \in X^2$, $x \neq y$, $\exists f \in A$, $f(x) \neq f(y)$.
- auto-conjuguée lorsque $\forall f \in A$, $\bar{f} \in A$.

Théorème 20: (Stone-Weierstrass) Si X est compact (une sous-algèbre A de $\mathcal{C}^0(X)$ séparable, auto-conjuguée et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}^0(X)$).

Exemple 21: L'ensemble des fonctions $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ lipschitziennes est dense dans $\mathcal{C}^0(X)$.

3) Interpolation

Théorème 22: (Lagrange) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ points distincts de $[a, b]$.

$\exists!$ $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$.

P_n est le polynôme interpolateur de f en les x_i et est défini par $P_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i$ où $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Proposition 23: On note $\Pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

Si f est $n+1$ fois dérivable alors $\forall x \in]a, b[\exists \xi \in]x_0, x_n[$ tel que $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x)$.

Corollaire 24: $\|f - P_n\| \leq \frac{M}{(n+1)!} \|\Pi_{n+1}\|$ où $M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Application 25: Pour $f = \exp$, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

III) Séries de Fourier

1) Polynômes trigonométriques

Proposition 26: L'espace $L^2_{2\pi}$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ est un espace de Hilbert.

Proposition 27: $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n: x \mapsto e^{inx}$.

L'espace des polynômes trigonométriques $\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $L^2_{2\pi}$.

Corollaire 28: $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Proposition 29: Soit $f \in L^1_{2\pi}$, on définit son n -ième coefficient de

Fourier par $C_N(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.

Proposition 30: si $f \in L^2_{2\pi}$, $V_n \in \mathbb{R}$, $C_N(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Proposition 31: (Riemann-Lebesgue) : $\forall f \in L^1_{2\pi}$, $C_N(f) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$.

Définition 32: $\forall N \in \mathbb{N}$, la N -ième somme partielle de la série de Fourier de $f \in L^1_{2\pi}$ est $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N C_N(f) e_n$.

Léonore 33: (Parseval) : $\forall f \in L^2_{2\pi}$, $\|S_N f - f\|_{L^2_{2\pi}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_N(f)|^2$.

Théorème 34: si $f \in C^1_{2\pi}$ et C' par morceaux, $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

2) Normes trigonométriques

Définition 35: Pour $N \in \mathbb{N}$, le N -ième moyen de Fejér est $D_N = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{N} e_k$.

Définition 36: Pour $N \in \mathbb{N}^*$, le N -ième moyen de Fejér est $F_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n$.

Proposition 37: $\forall N \in \mathbb{N}^*$, on a $\|F_N\|_1 = 1$ et $\forall u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $F_N(u) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\frac{N^2 u}{2})}{\sin(\frac{N u}{2})} \right)^2 \geq 0$.

et $\forall S \in]0, \pi[$, $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(S) < \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(S) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$.

Remarque 38: (F_n) est une suite régulière dans $L^1_{2\pi}$.

Définition 39: $\forall N \in \mathbb{N}^*$, la N -ième somme de Fejér de $f \in L^2_{2\pi}$ est $\sigma_N f = F_N * f = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) C_N(f) e_n$.

Théorème 40: $\forall f \in C^p_{2\pi}$ ($\forall p \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p < \infty$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_N f \in C^p_{2\pi}$ ($\forall p \in \mathbb{N}^*$) et $\sigma_N f \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} f$ dans $L^p_{2\pi}$.

Corollaire 41: $\forall f \in C^p_{2\pi}$ ($\forall p \in \mathbb{N}^*$), $\sigma_N f \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} f$ dans $C^p_{2\pi}$.

2) $\forall f \in C^p_{2\pi}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_N(f) = C_n(f)$ alors $f = g$.

3) Une application: suite de Weierstrass.

Théorème 42: Soit (u_n) une suite de $[0, 1]$ pour $0 \leq a \leq b \leq 1$.

On pose $X_n(a, b) = \# \{k \in [1, n] \mid u_k \in [a, b]\}$.

L.A.S.S.E. 1) $\frac{X_n(a, b)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b-a$ $\forall a, b \in [0, 1]$.

2) $\forall f \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt$.

3) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k^p = \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}$.

Exemple 43: Soit $\theta > 0$.

$(u_n)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 si $\theta \in \mathbb{Q}$.

Calcul intégrale de Fejér.