

Leçon N° 208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Dans cette leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E, F et G sont trois espaces vectoriels et ν désigne une norme positive sur $(\mathcal{L}(E, F))$ espace normable.

I) Présentations

1) Norme

Définition 1: Une norme $\|\cdot\|$ sur E est une application $E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant:

- $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (homogénéité)
- $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

Exemple 2: $\|\cdot\|$ est un evn.

Exemple 3: $\|\cdot\|$ est un evn. Soit $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$

Lemme 3: (Hölder) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f \in L^p([0,1])$ et $g \in L^q([0,1])$. Alors $fg \in L^1([0,1])$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ ou $\|f\|_p = (\int_0^1 |f|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Lemme 4: (Minkowski) Soient $p \geq 1, f, g \in L^p([0,1])$.

Alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Proposition 5: Pour $p \in [1, +\infty]$, $(L^p([0,1]), \|\cdot\|_p)$ est un evn.

Définition 6: Deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur E sont dites équivalentes lorsqu'il existe $\alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a$ et on note $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$.

Proposition 7: $\sim$ est une relation d'équivalence.

Exemples 8: Dans $\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty \sim$.

- Dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty \sim$ ($\frac{1}{p} \rightarrow \frac{1}{q}$).
- $\forall p, q \in [1, +\infty], \|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$ (avec $\frac{1}{p} \rightarrow \frac{1}{q}$).

2) Applications linéaires continues

Théorème 9: Soit f linéaire $(E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$.

Il y a équivalence entre:

- f est continue sur E .
- f est continue en 0.
- f est bornée sur $S_E(0,1) = \{x \in E, \|x\|_E = 1\}$.
- $\exists M > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.
- f est lipschitzienne.
- f est uniformément continue sur E .

Exemple 10: La continuité dépend de la norme: Soit $f: \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Définition - Proposition 11: On note $\mathcal{L}(E, F)$ les applications linéaires continues de $E \rightarrow F$ et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. On définit la norme subordonnée par: $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$.

Ce qui fait de $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ un evn.

Proposition 12: Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$, $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Proposition 13: Soit $f \in E^*$, f est continue sur E et (f) est fermé.

Corollaire 14: En particulier, $\forall$ hyperplan fermé $M, \exists f \in E^*$ continue telle que $M = \ker(f)$.

II) Cas de la dimension finie

1) Équivalence des normes

Dans cette section, tous les espaces sont considérés de dimension finie.

Proposition 15: $(E, \|\cdot\|_E)$ est normé, alors $\|\cdot\|_E$ est continue sur E .

Théorème 16: Soit un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 17: En dimension finie, toute application linéaire est continue.

dev 1

Corollaire 18: Tout evn de dimension finie est complet.

Exemple 19: Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est bien définie.

Corollaire 20: Tout sev de E est fermé dans E .

Corollaire 21: Les compacts de $(E, \|\cdot\|_E)$ sont les fermés bornés de E .

Contre exemple 22: (de 17) : $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ n'est pas

continu pour $\|\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$

Contre exemple 23: $B : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ n'est pas compact, alors que fermé borné.

Théorème 24: (Riesz). Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn.

$\dim(E) < +\infty$ ssi $\mathcal{B}_2(0,1)$ est compacte.

Application 25: Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, tout opérateur borné de X dans X est compact.

2) Normes sur les espaces de matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 26: Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une norme matricielle lorsque

$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Définition - Proposition 27: Les normes subordonnées sont des normes

matricielles et on définit $\forall p, q \in +\infty$.

$\|A\|_{p,q} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_q=1} \|Ax\|_p, \|A\|_p := \|A\|_{p,p}$.

Proposition 28: $\|A\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|)$

$\|A\|_1 = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} (\sum_{i=1}^n |a_{ij}|)$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}.$$

Application 29: Soit $A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$, On veut résoudre $Ax = b$.

On écrit $A = T^{-1}N$ avec $T \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ facile à inverser et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La méthode itérative basée sur $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{K}^n \\ T x_{k+1} = N x_k + b \end{cases}$

converge vers x ssi $\rho(T^{-1}N) < 1$.

III) Parlers de complétude.

1) Espace de Banach.

Définition 30: On dit d'un espace vectoriel normé qu'il est de Banach lorsqu'il est complet.

Exemples 31: $\mathbb{R}^n$ dimension finie, donc les evn sont de Banach. $\mathcal{C}([0,1])$ est de Banach pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Proposition 32: Si F est de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ aussi.

Théorème 33: F est de Banach ssi $(\sum u_n)$ converge normalement $\Rightarrow$

$\sum u_n$ converge.

Théorème 34: Si E est de Banach, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et u est ouverte.

Théorème 35: (Riesz-Fischer) $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est de Banach.

Proposition 36: Soit E un Banach, $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|u\| < 1$,

alors $\text{Id}_E - u$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k \in \mathcal{L}(E)$.

Application 37: $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Application 38: Cela permet d'étendre la transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

2) Espace de Hilbert

Définition 39: On appelle produit scalaire (resp. hermitien) toute application de $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

- 1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire (resp. sesquelinéaire)
- 2) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (resp. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$)
- 3) $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Exemple 40: $E = \mathbb{C}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ est un produit hermitien.

$E = L^2(p), \langle f, g \rangle = \int \overline{f} g d\mu$ est un produit hermitien.

Définition 41: Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien.

Si de plus, $\mathbb{K}$ est complexe, on dit que c'est un espace de Hilbert.

Exemples 42: 1) $\ell^2(\mathbb{N})$ est un Hilbert pour $\langle u, v \rangle = \sum_{n \geq 0} u_n \overline{v_n}$.

2) $L^2(p)$ est un Hilbert.

Proposition 43: Étant donné un produit scalaire sur $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$,

on a une norme $\| \cdot \|$: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ qui vérifie l'identité du parallélogramme.

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle$$

Remarque 44: Une norme dérive d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme.

Théorème 45: (Projection sur un sous-espace fermé)

Soient H un Hilbert, C un sous-espace fermé non vide de H ,

alors $\forall x \in H, \exists ! y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x, C)$

Ce point est appelé projection de x sur C noté $p_C(x)$ qui vérifie $p_C(x) = y \in C$ et $\forall z \in C, \operatorname{Re}\langle x-y, z-y \rangle \leq 0$.

(cf Annexe 1)

Corollaire 46: Soit F un sous-espace fermé de H de Hilbert, alors $F \oplus F^\perp = H$.

Théorème 47: (Représentation de Riesz) Soit H Hilbert :

$$\forall f \in H', \exists g \in H, f = \langle \cdot, g \rangle \text{ et } \|f\| = \|g\|$$

En particulier $H \cong H'$.

Application 48: En se restreignant aux variables réelles dans ℓ^2 , l'espace canonique est un espace orthogonale sur un corps réel.

Proposition 49: Soit $(e_i)_{i \in I}$ famille orthogonale. Pour $x \in E$

$$F = \operatorname{Vect}(e_i)_{i \in I}. \text{ Alors } x \in F$$

$$p_F(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Théorème 50: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale s.e. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $(e_i)_{i \in I}$ base hilbertienne de E (famille totale orthogonale)

$$2) \forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

$$3) \forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$$