

Leçon N° 206: Exemples d'application de la notion de dimension finie en analyse.

I) Topologie des espaces vectoriels normés à dimension finie.

1) Norme et compacité

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -espace vectoriel normé (evn).

Théorème 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les compacts de $(K^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont exactement les fermés bornés.

Théorème 2: Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 3: Si E est de dimension finie, alors E est complet.

Théorème 4: (de Heine) $B := B(0,1)$ est un compact de E si et seulement si E est de dimension finie.

Proposition 5: Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F < \dim E$. En particulier F est de dimension finie.

Alors: 1) F est d'intérieur vide dans E .

2) F est fermé dans E .

Proposition 6: Si E admet une base dénombrable, alors E n'est pas complet.

2) Continuité des applications linéaires

(même hypothèses qu'1.) et F est un K -ev normé.

Proposition 7: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est continue si et seulement si $f(B(0,1))$ est borné.

Théorème 8: Si E est de dimension finie, alors toutes les applications linéaires de E dans F sont continues.

Cette exemple 9: L'application linéaire: $\mathcal{L}(T_0, T, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto f(0)$.

n est une borne sur $\mathcal{L}(T_0, T, \mathbb{R})$.

Proposition 10: Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. φ continue si et seulement si φ est borné.

Corollaire 11: Soit H un sev fermé de E .

1) $\forall x \in K, H + Kx$ est fermé.

2) Si G est un sev de dimension finie de E , $H + G$ est fermé.

3) Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

Exemple 12: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.

$S_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.

Application 13: (décomposition polaire) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont homéomorphes.

II) Théorème et équations différentielles

1) Théorème de Lebesgue

Soient d et $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 14: (ADTISL) Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ tel que $\lambda([0,1]^d) = 1$ et $\forall a \in \mathbb{R}^d, \lambda(a + \cdot) = \lambda(\cdot)$.

λ est la mesure de Lebesgue.

Proposition 15: Soit $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$.

Alors $\forall f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax+b) dx = \frac{1}{|\det(A)|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$.

Proposition 16: (matrice Jacobienne). Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

une application différentiable. La matrice jacobienne J_f de f est

$$Jg = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \dots & \partial_1 g_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n g_1 & \dots & \partial_n g_n \end{pmatrix}$$

Théorème 17: (Changement de variables).

Soit φ un C^1 -difféomorphisme entre D et D' deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Alors $\forall f: D' \rightarrow \mathbb{R}$, f est intégrable sur D' si et seulement si $f \circ \varphi$ est intégrable sur D et dans ce cas:

$$\int_D f(u) du = \int_D f(\varphi(u)) | \det J\varphi(u) | du.$$

Application 18: $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$

2) Equations différentielles linéaires

Théorème 19: (Cauchy) - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si $A \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{R}))$ et $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, alors $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy suivant admet une unique solution:

$$(A) : \begin{cases} \forall t \in I, x'(t) = A(t)x(t) + B(t) & (E) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Corollaire 20: L'espace des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension finie, égale à n .

Définition 21: Soit $(y_1, \dots, y_n)$ une base de S_A . $\forall t \in I$, on définit $\Phi(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ une matrice fondamentale de (E), on appelle Wronskien de cette matrice notée W

le déterminant de Φ .

Théorème 22: (Liouville) $W'(t) = \text{tr}(A) W(t)$.

Application 23: (Equation de Bessel)

On considère $(E): xy'' + y' = 0$.

1) J_0 solution DSE - on IR de (E) et valeur 1 en 0.

$$C'W = f_0(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

2) Si f est une solution de (E) , on J_0, J_1 , alors:

(f, f_0) est base m (f pas bornée en 0)

$$3) \forall n \in \mathbb{N}, f_0(u) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

III) Optimisation

Définition 24: Soit $(E, ||\cdot||)$ un E v.n. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est coercive lorsque $f(u) \xrightarrow{||u|| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Proposition 25: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est coercive sur $\mathbb{R}^n$ et coercive, alors f admet un minimum.

Application 26: (Descente de Gradient) Soit $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1

$u \neq 0$ tel que $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$G(y) - G(x) \geq \langle \text{grad } G(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} ||y - x||^2.$$

Alors G admet une borne inférieure sur $\mathbb{R}^n$ et la suite (u_k) définit par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = u_k + \lambda_k \nabla G(x_k) \end{cases}$$

de 2.

On a q tel tel que $x_k + kq \in G$ ($G \subset \mathbb{R}$) et un minimum de G en $x_k + kq \in G$ converge vers cette borne inf.

IV) Séries de Fourier

On note $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ ($\text{resp. } \mathcal{L}_{2\pi}^1$) l'espace des fonctions 2π -périodiques de $\mathcal{C}^0$ ($\text{resp. } \mathcal{L}^1$).

Théorème 27 (Dirichlet) : Soient $f \in \mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π -périodique et $x \in \mathbb{R}$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N(f) : t \mapsto \sum_{n=-N}^N e^{int} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$. Alors $S_N(f)(x) \sim \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

Théorème 28 (Féjér) : Pour $N \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$,

$$\text{on pose } \sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$$

1) si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} \rightarrow 0$.

2) si $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_1 \rightarrow 0$.

Corollaire 29 : soit $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ en base dans $\mathcal{L}_{2\pi}^0$ et $\mathcal{L}_{2\pi}^2$.

Théorème 30 : $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{L}_{2\pi}^2$.

Corollaire 31 : $\forall f \in \mathcal{L}_{2\pi}^2$, $\|S_N(f) - f\|_2 \rightarrow 0$.

Applications 32 : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

partir avec de l'algèbre
lire : Fischer, Cochrane