Leçon N° 25 : Espaces complets. Exemples et applications.

I) Espaces complets.

Dans cette partie, (X, d) désigne un espace métrique muni de la topologie associée à d.

1) Définitions et propriétés.

Définition 1 : Une suite (x_n) de (X, d) est dite de Cauchy lorsque : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

Proposition 2 : 1) Une suite qui converge est de Cauchy.

2) Une suite de Cauchy est bornée

3) Une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence converge vers cette valeur.

Définition 3 : On dit que (X, d) est complet lorsque toute suite de Cauchy converge vers un élément de X.

Exemple 4 : $\mathbb{R}$ est complet

$\mathbb{Q}$ n'est pas complet

Proposition 5 : Si X est compact, alors il est complet.

Proposition 6 : Si $F \subset X$ est fermé et si X est complet, alors F est complet

Proposition 7 : Si $Y \subset X$ et si Y est complet : alors Y est fermé dans X.

Proposition 8 : Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. Alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est complet pour la distance produit ssi $\forall i \in [\![1, n]\!]$ (E_i, d_i) est complet.

Exemple 9 : $(\mathbb{R}^d, d_1)$ est complet.

2) Théorème du point fixe de Banach Picard

Définition 10 : Soient X et Y deux espaces métriques et $q \in [0, 1[$. On dit que $f : X \to Y$ est q contractante lorsque $\forall (x, y) \in X^2$, $d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x, y)$

Théorème 11 : (point fixe de Banach Picard) Si X est complet. Alors pour $f : X \to X$ une application q-contractante,

1) f admet un unique point fixe $x^* \in E$.

2) $\forall x_0 \in E$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ vérifie $d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

dev 1

Remarque 12 : Nous en verrons plusieurs applications une fois exposée la notion d'espace de Banach.

3) Théorème de prolongement

Théorème 13 : Soit $A \subset X$ dense. Soit (Y, d') un espace métrique complet, $f : A \to Y$ uniformément continue. Alors :

1) $\exists ! \, g : X \to Y$ prolongeant f tq g soit continue

2) g est uniformément continue

II) Espaces de Banach.

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés.

1) Propositions et définitions

Définition 14 : Un espace de Banach est un espace vectoriel normé qui est complet (pour la distance associée à la norme).

Exemple 15 : Tout $\mathbb{R}$-ev de dimension finie est un espace de Banach.

Proposition 16 : Supposons que F est de Banach.

Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un Banach pour la norme subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Théorème 17 : Toute suite à valeurs dans E de Cauchy converge ssi Toute série de E absolument convergente converge.

Proposition 18 : Si E est de Banach, alors la convergence normale entraine la convergence uniforme.

2) Espaces de Lebesgues L^p

Notations 19 : Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$.

On munit l'espace vectoriel $L^p(X)$ de la norme $\|\cdot\|_p$ définie par : $\forall f \in L^p(X)$:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \text{ si } p \in [1, +\infty[$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0, \mu(\{|f| > c\}) = 0\} \text{ sinon.}$$

Théorème 20 : (Riesz-Fischer) $\forall p \in [1, +\infty]$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

3) Applications du théorème de Banach Picard

Théorème 21 : (version linéaire) Soient $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle, E un espace de Banach.

$A : J \to \mathcal{L}(E)$ continue, $b : J \to E$ continue

$t_0 \in J$ et $x_0 \in E$.

Alors $\exists!\, x \in \mathcal{C}^1(J, E)$ tel que : $\begin{cases} \forall t \in J,\ x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Théorème 22 : (inversion locale)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\det(Df_a) \neq 0$

Alors $\exists$ un ouvert V contenant a inclus dans U et un ouvert W contenant $b := f(a)$ tels que f restreinte à V soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $W = f(V)$. (cf Annexe 1)

II) Espace de Hilbert

Soit $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un préhilbertien.

1) Propositions et définitions

Définition 23 : On dit que $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est de Hilbert lorsque X est complet pour la distance associée à $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Exemples 24 : 1) $\ell^2(\mathbb{N})$ est un Hilbert pour $\langle u, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \overline{v_n}$.

2) $L^2(X)$ est complet pour $\langle f, g \rangle = \int_X f \overline{g} \, d\mu$.

Théorème 25 : (projection sur un convexe fermé)

Soit C un convexe fermé de H non vide et supposons H de Hilbert.

$\forall x \in H$, $\exists!\, p \in C$ tel que $\|x - p\| = d(x, C)$.

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant :

$\forall c \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x - p, c - p \rangle) \leq 0$. (cf annexe 2)

Corollaire 26 : Soit F un sev fermé de H, de Hilbert, alors $H = F \oplus F^\perp$.

Application 27 : (Théorème de représentation de Riesz).

Supposons H de Hilbert.

Alors $\forall \Phi \in H'$, $\exists!\, f \in H$ tel que $\forall v \in H$, $\Phi(v) = \langle f | v \rangle$

De plus, $\Phi \mapsto f$ est un isométrie : $\|f\|_H = \|\Phi\|_{H'}$.

En particulier $H \simeq H'$.

2) Application à la Transformée de Fourier

Définition 28 : Pour f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$ et dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ on définit sa transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx$$

Théorème 29 (Plancherel) : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, $\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$.

Lemme 30 : $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 31 : Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

$\exists (f_n) \subset L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f.

La limite de la suite $(\hat{f}_n)$ existe dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On la note $\hat{f}$.

Elle est indépendante de la suite choisie.

Définition 32 : La limite $\hat{f}$ ci dessus est appelée transformée de Fourier de f.

Proposition 32 : $\exists!$ extension linéaire continue $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ qui est de plus une isométrie bijective.

Application 33 (Heisenberg) :

$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2\, dx \int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2\, d\xi \geq \frac{1}{4} \|f\|_{L^2}^4$.