

Leçon N° 204: Connexité. Exemples et applications.

1) Espaces connexes.

1) Connexité.

Définition - Proposition 1: Soit (E, d) un espace métrique.

On dit qu'il est connexe lorsqu'un des conditions équivalentes suivantes est satisfaite:

- 1) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides.
- 2) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides.
- 3) Les seuls parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E .

Proposition 2: $A \subseteq E$ est connexe si

- 1) si $A \subset O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, alors $(A \cap O_1 = \emptyset \text{ et } A \subset O_2)$ ou $(A \cap O_2 = \emptyset \text{ et } A \subset O_1)$. N°
- 2) si $A \subset F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont deux fermés de E vérifiant $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$, alors $(A \cap F_1 = \emptyset \text{ et } A \subset F_2)$ ou $(A \cap F_2 = \emptyset \text{ et } A \subset F_1)$.

Exemple 3: $\mathbb{Q}$ n'est pas un espace connexe de $\mathbb{R}$.

Proposition 4: E est connexe si toute application $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ continue est constante.

Théorème 5: Soit $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$ une application continue.

Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.

Proposition 6: Soit $A \subseteq E$ une partie connexe. Si $B \subseteq E$ vérifie

$A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

Proposition 7: Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de connexes si E telle que

$\forall i \in I, \forall j \in I, C_i \cap C_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.
Contre exemple 8: En général, une union de connexes n'est pas connexe:
 $\{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$ n'est pas un espace de $\mathbb{R}$.

Proposition 9: Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de plus dénombrable de connexes telle que $\forall i \in I, i \neq 0, C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Proposition 10: Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ un nombre fini d'espaces métriques. Alors l'espace produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ est connexe si et seulement si $E_1, \dots, E_n$ sont connexes.

2) Composants connexes.

Définition - Proposition 11: Soit (E, d) un espace métrique. On considère $M_n(E, d)$ la relation: $(x, y) \text{ si } (\exists C \text{ connexe de } E \text{ tel que } x \in C \text{ et } y \in C)$. C'est une relation d'équivalence.

Définition 12: Soit $x \in E$; sa classe d'équivalence, notée x s'appelle la composante connexe de E .

Proposition 13: x est un espace de E , fermé de E et ouvert.

Proposition 14: Les composants connexes sont ouverts et fermés. Soit n nombre fini.

3) Connexité de $\mathbb{R}$

Théorème 15: Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Corollaire 16: (théorème des valeurs intermédiaires):

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

i.e. si $f(a) \in f(b)$ avec $a < b$ alors $\forall x \in (f(a), f(b))$, $\exists c \in I$ tel que $f(c) = x$.

II) Connexité par arcs.

Définition 17: Soit (E, d) un espace métrique. On appelle chemin de γ toute application $\gamma: [0, 1] \rightarrow (E, d)$ continue. L'image $\gamma([0, 1])$ du chemin s'appelle arc, $\gamma(0)$ est son origine et $\gamma(1)$ son extrémité.

Définition 18: Soit (E, d) un espace métrique. On dit que E est connexe par arcs lorsque $\forall (a, b) \in E^2$, $\exists$ un arc $\subset E$ d'origine a et d'extrémité b .

Théorème 19: Un espace connexe par arcs est connexe.

Corollaire 20: Les courbes et les parties étoilées sont connexes par arcs donc connexes.

Exemples 21: Les boules d'un $\mathbb{R}^n$ sont connexes par arcs.

2) La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arc.

3) $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Proposition 22: Pour les courbes d'un $\mathbb{R}^n$ -esp., la connexité et la connexité par arcs sont des notions identiques.

Contre exemple 23: Soit Γ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Gamma = \left(\bigcup_{a \in \mathbb{Q}} (a, 1) \times \mathbb{R}^+ \right) \cup \left(\bigcup_{a \in \mathbb{R}} (a, 1) \times \mathbb{R}^+ \right)$$

est un connexe de $\mathbb{R}^2$ mais pas connexe par arcs.

III) Applications:

1) Groupes matriciels.

Proposition 24: 1) $SL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

2) $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs, $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$. Proposition 25: $U_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

3) $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes par arcs, $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

Théorème 26: $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Lemme 27: Soit G un sous groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$ et $G \neq O$. La composante connexe par arcs de $\mathbb{R}$ dans G ; alors G est un sous groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$.

2) Analyse complexe.

Définition 28: Soit γ un arc de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. L'intégrale de a par rapport à γ est $\text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

Proposition 29: $\forall \gamma$ arc de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, Ind_γ est constante à valeur entière sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. So f et toutes ses dérivées s'annulent en a alors f est nulle sur la composante connexe de $\mathbb{C}$.

Théorème 30: Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. So f et toutes ses dérivées s'annulent en a alors f est nulle sur la composante connexe de $\mathbb{C}$.

Corollaire 31: (Prolongement analytique) On suppose γ connexe

soient f et g des fonctions holomorphes de $\mathbb{R}$. S'il existe un ouvert non vide V de $\mathbb{R}$ tel que $f = g$ sur V , alors $f = g$ sur γ .

Application 32: On note $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{tel que } \text{Re}(z) > 0\}$

$\Gamma: \mathcal{P} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}$ & prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Le prolongement au $\mathbb{C}$ ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \{-1, -i, 1, i\}$ analytique.

des points.

est $\gamma \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\gamma+n)} + \int_0^{+\infty} e^{-t} t \gamma^{-1} dt$.

Principe 33: Principe des zéros isolés) Si Ω est connexe et $f \in H(\Omega) \setminus \{0\}$. On note $Z(f) := \{z \in \Omega, f(z) = 0\}$. Alors:

1) Si $z \in Z(f)$, $\exists \lambda > 1$ et $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tel que $f(z) = (z-a)^\lambda \gamma(z)$ avec $\gamma(a) \neq 0$.

2) $Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω .

3) Exponentielle complexe

Lemme 34: $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(C) \in GL_n(\mathbb{C})$.

Lemme 35: $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $[C]^\times = [C] \cap GL_n(\mathbb{C})$

Lemme 36: $\exp$ est un morphisme de groupe:
 $([C]^\times, +) \rightarrow ([C]^\times, \times)$

Théorème 37: $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.