

Leçon N° 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Dans toute cette leçon, (X, d) est un espace métrique.

1) Notion de compacité.

1) Propriété de Boule - Lebesgue.

Définition 1: X est dit compact lorsqu'il est tout recouvert

de X par des ouverts, on peut en extraire un sous-recouvrement

fini: si $X = \bigcup_{i \in I} O_i$, $I \subseteq \mathbb{I}$, il finit tel que $X = \bigcup_{i \in J} O_i$.

Exemple 2: $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

1) $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Proposition 3: Un espace métrique compact est borné.

Proposition 4: X est compact si et seulement si toute intersection vide de fermés de X ,

on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Corollaire 5: Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non

vide dans un compact, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Application 6: Une réunion finie de parties compactes est compacte.

Application 7: Une intersection de compacts est compacte.

2) Propriété de Polygones - Weierstrass.

Définition 8: (Propriété de Polygones - Weierstrass) On dit que X est

séquentiellement compact lorsqu'il existe $(x_n) \in X$, on peut extraire une

sous-suite convergente dans X .

Proposition 9: X (qui est un espace métrique) est compact si et

X est séquentiellement compact.

Corollaire 10: X est compact si toute suite d'éléments de X admet ou moins une valeur d'adhérence dans X et toute partie infinie de X admet au moins un point d'accumulation dans X .

Proposition 11: Un espace compact est complet et fermé.

Lemme 12: Si X est compact, alors:

$(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ converge si elle a une unique valeur d'adhérence.

II) Compacité et applications continues.

1) Résultats fondamentaux.

Définition 13: Soit $f: X \rightarrow Y$. f est dite uniformément continue

sur X lorsqu'on $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in X^2, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Théorème 14: (Heine) Soit $f: X \rightarrow Y$ est un compact. Alors toute fonction

continue de X dans Y est uniformément continue sur X .

Proposition 15: L'image d'un compact de X par une fonction

continue est un compact de Y .

Théorème 16: (Bornes atteintes) Soient X un compact de X et

$f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 17: (Bolzano-Weierstrass) Soit $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

sur $\mathbb{I}$ f dérivable sur $\mathbb{I}$, $f'(x) = 0$.

Alors $\exists c \in \mathbb{I}$ tel que $f'(c) = 0$.

(cf annexe 1).

Application 18: (Égalité des approximations finies). Sans les mêmes hypothèses.

Proposition 19: Soit $f(a) = f(b)$, $f \in C^1[a, b]$ tel que $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f(c)$.
(cf annexe 2)

2) Théorème de Weierstrass

Notation 19: $\mathcal{C} = \mathcal{C}(R, C)$

$$f: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$(f, g) \mapsto fg: x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt.$$

Définition 20: On dit qu'une suite $(x_n) \in \mathcal{C}(R)$ est une approximation de l'unité lorsque $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) dt = 1$ et $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|t| \geq \epsilon} x_n(t) dt = 0$.

Lemme 21: $\forall f \in \mathcal{C}$, $\forall (x_n)$ nouvelle approximation de l'unité, $(f * x_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f .

Exemple 22: pour $n \in \mathbb{N}$, on a: $\int_{-1}^1 (1-t)^n dt = 1$.

$$x_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mapsto \frac{(1-t)^n}{n!} \quad \text{on} \quad \|t\| \leq 1.$$

(x_n) est une approximation de l'unité.

Théorème 23: (Weierstrass) Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et $f: J \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit limite uniforme par J d'une suite de fonctions polynomiales.

Définition 24: Une partie $H \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ où X est compact est dite séparée lorsque $\forall (x, y) \in X^2$ tel que $x \neq y$, $\exists h \in H$ telle que $h(x) \neq h(y)$.

Théorème 25: (Stone-Weierstrass). Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ (stable par conjugaison)

$n \cdot \mathbb{K} = \mathbb{C}$ Séparable et contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

3) Théorème de point fixe

Théorème 26: Soit X compact. Soit $f: X \rightarrow X$ avec $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $d(fx, fy) < d(x, y)$. Alors $\exists ! x \in X$, $f(x) = x$.

Contre-exemple 27: Si X est non compact non complet, cela est faux: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + \frac{1}{1+x} & \text{sinon.} \end{cases}$

Application 28: Si $\mathbb{K} \subset X$ est compact convexe et si $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ est 1-Lipschitzienne. Alors f admet au moins 1-Meur fixe.

III) Comparaison dans les espaces vectoriels normés

Dans la suite, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé (noté evn) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Les cas de la dimension finie

Proposition 29: Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés.

Théorème 30: Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Application 31: (Théorème de Baire) $B := B_2(0, 1)$ est compact dans E si E est de dimension finie.

Proposition 32: Toute application linéaire de E dans un E de

dimension finie est continue.

Lemme 33: $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Application 34: (Décomposition polaire) $\forall T \in O_n(\mathbb{R}), \exists U, \exists V \in O_n(\mathbb{R})$

$\in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $T = UV$. L'application ainsi définie est un homéomorphisme.

Application 35: L'application $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Définition 36: Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est coercive lorsque $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Lemme 37: Si f est continue de $\mathbb{R}^n$ et coercive, alors elle admet un minimum.

Application 38: $S_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se définit par $(x, y) \mapsto \frac{1}{2} \|y - x\|^2$, tel que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$G(y) - G(x) \geq \langle \text{grad } G(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$$

Alors G admet un borne inférieure sur $\mathbb{R}^n$ et en

subit (x_k) définie par: $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k + \lambda_k \nabla G(x_k) \end{cases}$

où λ_k est tel que $x_k + \lambda_k \nabla G(x_k)$ est un minimum de G

sur $x_k + \mathbb{R} \nabla G(x_k)$ converge vers celle borne inf.

2) Théorème d'Ascoli.

X est compact.

Définition 39: Une partie H de $(C^0(X), \|\cdot\|_\infty)$ est dite équicontinue en $x_0 \in X$ lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \forall f \in H, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

On dit que H est uniformément équicontinue lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in X^2, d(x, y) < \eta \Rightarrow \forall f \in H, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Proposition 40: Soit (f_n) équicontinue et D dense de X .

Si (f_n) converge simplement $\forall x \in D$, alors (f_n) converge uniformément sur $C^0(X)$.

Théorème 41: (Ascoli) Une partie de $(C^0(X), \|\cdot\|_\infty)$ est

relativement compact si elle est bornée et équicontinue.

$\hookrightarrow$ (ascoli compact).

Application 42: (Plans) Soit $f \in C^0([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que:

$$\exists T > 0, \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}, |f(x, t)| \leq T(1 + |x|)$$

Le problème de Cauchy: $\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

admet une solution C^1 sur $[0, T]$.