Leçon N° 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

I) Espaces des fonctions continues à support compact

1) Généralités

À partir de maintenant, (X,d) est un espace métrique compact non vide. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{C}(X) := \{ f : X \to \mathbb{K} \text{ continues sur } X \}$. On rappel que f est continue sur X lorsque : $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tq $\forall y \in X$, $d(x,y) < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Définition - Proposition 1 : On munit $\mathcal{C}(X)$ de la norme uniforme sur X : $\|f\|_\infty := \max_{x \in X} |f(x)|$.

Proposition 2 : $\forall (f,g) \in \mathcal{C}(X)^2$, $\|fg\|_\infty \|g\|_\infty \geq \|fg\|_\infty$.

Proposition 3 : Si (f_n) converge uniformément sur X vers f, alors (f_n) converge simplement sur X vers f.

Contre exemple 4 : Sur $[0,1]$. $f_n := x \mapsto x^n$, $f_n \xrightarrow[\text{cos}]{} f := \mathbb{1}_{\{1\}}$ mais ne converge pas uniformément.

Lemme 5 : (Dini) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions, cette suite étant croissantes, de $\mathcal{C}(X)$. Si (f_n) converge simplement sur X vers f, alors $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exemple 6 : En étendant la notion de convergence uniforme pour les fonctions bornées sur $\mathbb{R}$, $f_n(x) := \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \leq n \text{ défini sur } \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : x \mapsto e^{-x}$.

2) Théorèmes de Stone-Weierstrass

Notation 7 : $\mathcal{E} = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\ast : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \xrightarrow{} \mathcal{E}$, $(f,g) \mapsto f \ast g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$.

Définition 8 : On dit qu'une suite (χ_n) de fonctions positives sur $\mathbb{R}$ est une approximation de l'unité lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t)\, dt = 1$ et $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} \chi_n(t)\, dt = 0$.

Proposition 9 : Soit (χ_n) une approximation de l'unité alors $\forall f \in \mathcal{E}$, $(f \ast \chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\text{unif}} f$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 10 : Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, dt$ et $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \mathbb{1}_{|t| \leq 1}$ alors (P_n) est une approximation de l'unité.

Théorème (de Weierstrass) : Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{C}$ une fonction continue. f est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynomiales.

Théorème 12 : (Stone-Weierstrass) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{C}(X)$ vérifiant :
1) $\mathcal{A}$ stable par $+$
2) $\mathcal{A}$ stable par $\times$
3) $1 \in \mathcal{A}$
4) $\forall x \neq y$, $\exists f \in \mathcal{A}$ tq $f(x) \neq f(y)$
5) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ stable par conjugaison.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Exemple 13 : $(x \mapsto e^{in\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses pour $X = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Ça fournit le théorème de Weierstrass trigonométrique.

Application 14 : (Critère de Weyle). Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Pour $0 \leq a < b \leq 1$ On pose $\chi_n(a,b) = \#\{k \in [\![1, n]\!],\ u_k \in [a,b]\}$.
Il y a équivalence entre : 1) $\frac{\chi_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} b - a$. $\forall (a,b)$
2) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \to 0$

dev 1

dev possible

3) $\forall f : [0,1] \to \mathbb{R}$ C^0, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

3) Théorème d'Ascoli.

Définition 15 : Soit $H \subset C(X)$. Soit $x_0 \in X$.

On dit que H est équicontinue en x_0 lorsque :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \forall h \in H,\ |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$

On dit que H est équicontinue lorsqu'elle est équicontinue en tout point de X.

On dit que H est uniformément équicontinue lorsque :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in X,\ d(x, y) < \eta \Rightarrow \forall h \in H,\ |h(x) - h(y)| < \varepsilon$.

Proposition 16 : Une partie de $\mathcal{C}(X)$ est équicontinue ssi elle est uniformément équicontinue.

Proposition 17 : Soit (f_n) une suite équicontinue de $\mathcal{C}(X)$ et D une partie dense de X. Si la suite numérique $(f_n(x))$ converge $\forall x \in D$, alors (f_n) converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$.

Théorème 18 (Ascoli) : Une partie de $\mathcal{C}(X)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(X)$ ssi elle est bornée et équicontinue.

Application 19 : Soit $K \in \mathcal{C}(X, Y)$ et μ une mesure borélienne finie. Soit $T : f \in \mathcal{C}(X) \mapsto (Tf : x \mapsto \int_Y K(x, y) f(y)\,d\mu(y))_{f \in \mathcal{C}(X)}$.
Alors $T(B_{\mathcal{C}(Y)}(0,1))$ est relativement compacte.

II) Espaces L^p.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $p \geq 1$.

1) Présentations.

Définition 20 : On définit l'espace de Lebesgue $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ tel que $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} < +\infty$.

On note $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)/\sim$ où $\sim$ est la relation (de équivalence) $f \sim g$ ssi $f = g$ μ-p.p.

On notera simplement L^p s'il n'y a aucune ambiguïté.

Lemme 21 : (Hölder) Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Si $f \in L^p$, $g \in L^q$, alors $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Lemme 22 : (Minkowski) Soient $p \geq 1$, $f, g \in L^p$.
Alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Proposition 23 : $\forall p \in [1, +\infty]$, L^p est un espace vectoriel normé pour $\|\cdot\|_p$.

Proposition 24 : Si $\mu(X) < +\infty$, alors pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, $L^q \subset L^p$.

Théorème 25 : (Riesz-Fischer) $\forall p \in [1, +\infty]$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un Banach.

2) Cas particulier de L^2.

On se place dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Définition - Proposition 26 : $\|\cdot\|_2$ dérive du produit scalaire (resp hermitien) $\langle f, g \rangle = \int f g\,d\mu$ (resp $\int f \bar{g}\,d\mu$).
Cela fait de $(\|\cdot\|_2, \langle , \rangle)$ un préhilbertien et même un Hilbert.

Théorème 27 : (Représentation de Riesz) L'application φ définit par $g \in L^2 \mapsto (f \mapsto \langle f, g \rangle) \in L^{2\prime}$ est une bijection isométrique.
En particulier $L^2 \simeq L^{2\prime}$.

Application 28 : Si μ est une mesure de probabilité. En se restreignant aux variables aléatoires dans L^2, l'espérance conditionnelle est une projection orthogonale.

Application 29 : La transformée de Fourier s'étend de manière unique de $L^1 \cap L^2$ sur L^2 comme une isométrie.

3) Dualité.

Ici μ est supposé σ-finie.

Soient $p, q \geq 1$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Définition 30 : pour $g \in L^q$, on définit une forme linéaire sur L^p par : $\forall f \in L^p$, $T_g f = \int fg \, d\mu$.

~~Remarque 31 : Le théorème de Riesz montre que~~

Lemme 31 : Supposons que $\mu(X) < +\infty$. Soit $T \in (L^p_{\mathbb{R}})'$. Si T est positive, alors $\exists g \geq 0$ telle que $\forall f \in L^p_{\mathbb{R}}$, $fg \in L^1_{\mathbb{R}}$ et $Tf = \int fg \, d\mu$.

Lemme 32 : Soit $T \in (L^p)'$, $\exists g$ fonction mesurable telle que $\forall f \in L^p$, $fg \in L^1$ et $Tf = \int fg \, d\mu$.

Lemme 33 : Avec les notations ci-dessus, $g \in L^q$ et $\|g\|_q \leq \|T\|_{p'}$ où $\|\cdot\|_{p'}$ représente la norme dans $(L^p)'$.

Théorème 34 : Si $1 \leq p < +\infty$, l'application linéaire $L^q \to (L^p)'$, $g \mapsto T_g$ est une isométrie surjective de L^q sur $(L^p)'$.