

Leçon N° 191

Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie

I) Utilisation des espaces euclidiens

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1) Norme et distance

Définition - Proposition 1: $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0\})^2, \exists ! (t \in [0, \pi])$ tel que

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

θ s'appelle l'angle angulaire de x et y .

Proposition 2: (Pythagore) Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille finie orthogonale de E ,

$$\| \sum_{i \in I} e_i \|^2 = \sum_{i \in I} \|e_i\|^2$$

Si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, alors $x \perp y$.

Proposition 3: (Pélobon) $\forall (x, y) \in E^2, \|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Proposition 4: Soit F un sev de E , alors $E = F \oplus F^\perp$.

Définition 5: Soit F un sev de E .

1) On appelle projection orthogonale sur F la projection lin F parallèlement à $F^\perp$.

2) On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Proposition 6: Soit F sev de E , soit $x \in E$ et p sa projection orthogonale sur F ,

$$\text{alors } \langle x, p \rangle = \|x - p(x)\|.$$

2) Isométries et isométries

Définition 7: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une isométrie lorsque

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|.$$

$$\text{soit } \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Proposition 8: Les isométries sont bijectives.

Proposition 9: L'ensemble des isométries de E est un groupe pour $\circ$

$$\text{noté } \mathcal{O}(E).$$

Proposition 10: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f est une isométrie de E ssi l'image d'un

NON par f est un BON

II) Utilisation des espaces euclidiens

Proposition 11: $\mathcal{O}(E) \simeq \text{On}(n)$ en tant que $\mathbb{R}$ -ev.

Proposition 12: Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det(f) \in \{1, -1\}$.

Définition 13: $\mathcal{SO}(E) := \{f \in \mathcal{O}(E) \mid \det(f) = 1\}$.

Proposition 14: $\mathcal{SO}(E) \triangleleft \mathcal{O}(E)$.

Lemme 15: Si $n \geq 3$, Soient τ_1, τ_2 des réflexions de E , alors $\tau_1 \tau_2$ est

une rotation.

Proposition 16: $\mathcal{SO}(E)$ est engendré par les réflexions, plus précisément, si

$u \in \mathcal{O}(E)$, u est produit d'un plus ou moins.

2) Si $n \geq 3$, $\mathcal{SO}(E)$ est engendré par les rotations, plus précisément, si

$u \in \mathcal{SO}(E)$, u est produit d'un plus ou moins.

Théorème 17: Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

1) Si $n = 2$, $f = \pm I_2$ ou $f = -I_2$ ou f est réflexion, ou f est rotation

2) Si $n = 3$, $f = \pm I_3$ ou $f = -I_3$ ou f est un réflexement ou f est

une réflexion, ou f est un antisymétrisme.

3) Endomorphismes symétriques

Définition 18: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ on dit que f est symétrique lorsque $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \text{ et on note } f \in \mathcal{S}(E).$$

Lemme 19: Si $f \in \mathcal{S}(E)$ et F sev de E , stable par f , alors

$F^\perp$ est stable par f .

Théorème 20: (spectral) Soit $f \in \mathcal{S}(E)$, f BON (forme de vecteurs propres,

non f et ces valeurs propres sont réelles.

Définition 21: Soient $x_1, \dots, x_r$ vecteurs de E . On appelle matrice de

Gram de $x_1, \dots, x_r$ la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq r}$ et

déterminant de Gram des déterminant, noté $G(x_1, \dots, x_r)$.

Proposition 22: Toute matrice de Gram est symétrique positive.

des 1

Peu à peu, l'ensemble des données se construit. Le plan, la machine à coudre, le vélo, le téléphone, la famille (le père en l'occurrence).

Théorème 2.3. Soit F un $\mathbb{C}$ -module d'une base $(e_1, \dots, e_r)$.
Soit $n \in \mathbb{C}$, alors la dimension de $n \otimes F$ vérifie

$$J_2 = \frac{C(a_1, \dots, a_n)}{C(a_1, \dots, a_n)}$$

Remarque 2: En dimension 2, on retrouve la formule de l'aire d'un parallélogramme :

II) Coördinat affine

Donc cette partie, il est un corps

1) Espece de application officier

Definition 8: Un ensemble E est muni d'une structure d'espèce affine lorsqu'il

3) $B \in \mathcal{E}$ l'élément $\overrightarrow{AB} = 0$ est $V(A, B) \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (addition de vecteurs).
 Pour ce cas, l'écriture précédente de $\mathcal{E}$ est en fait $\mathcal{E} = E$ et on $\mathcal{E} = \text{vect } E$.
Définition 26 Soit $\mathcal{E} \subset E$, $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de E lorsqu'il

$\exists A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F}_A = \{A, B, C\}$ est un s.c.v. i.e. borné et c.c.,
 $\mathcal{F}_A$ ne dépend pas de A .

Exemple 2.7. Si E est un W -co, l'ensemb. de E sont les f tels que $f \in E$ si et seulement si $f \in W$ et $f \in E$.

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tel que $VF \in \mathcal{L}$, $f(\text{ON}) = \mathcal{L}(0) \mathcal{L}(1)$
Proposition 25: Soit $\mathcal{L}$ algébrique $\mathcal{Q}$, f fct définie par $\mathcal{L}(0)$, $\mathcal{L}(1)$ unique, tel $\mathcal{L}(0)$.

Example 30: $\varphi: E \rightarrow E$ telle que $\forall (M, N) \in E^2, A \varphi(N) =$
 est définie, c'est une bijection on note $\varphi = \tau^{-1}$ et $\tau^{-1} = \tau^{-1} \varphi^{-1}$

Proposition 3.1: Soient E, F, G des espaces affines, $\varphi \in \text{Aff}(E, F)$, $\psi \in \text{Aff}(F, G)$, alors $\psi \circ \varphi \in \text{Aff}(E, G)$ et $\psi \circ \varphi = \overline{\psi \circ \varphi}$.

2) Fragezeichen

Definition proposition 32: Soit $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M^n$
 et que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Alors $\exists ! \vec{C} \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{C} A_i = \vec{0}$.
 Le plus $\forall \vec{C} \in \mathcal{E} / \vec{C} \vec{C} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{C} A_i$. C'est appelé barycentre du système.
 Si $\forall i, \delta_i \in \{0, 1\}$, $\alpha_i = \delta_i$, on parle d'isobarycentre.

Exemple 33 $V(a, b) \in \mathbb{R}$, $\Gamma(a, b) = \{ \text{tangente de } ((a, b), (b, 1-b)) \in \Gamma(S) \}$

Réunion 34 Soit $S \subseteq \mathbb{E}$, $\text{Conv}(S) = \{ \text{convexité des segments joignant des } S \}$

coefficient monthly
improvement 3.5% per year
your investments do seem positive. Still, the

homocentrique. Soit $\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ affine, φ induit la tangente à Prc proprement, si $V \cap \text{PB} \in \mathbb{E}$, $V \in \text{IK}$, l'image au tangente de $((A, B), (B, A))$ est la tangente de $((\varphi(A), 0), (\varphi(B), A))$ alors $\varphi \in \text{Aff}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$.

Ensemble des soit P un polygone du plan affine de taille 1/16152 N
des polygones du même contourage ven d'indiquer que.
(cf. Prouzet),

3) Isoelectronic

Définition 37: Soit $f \in \mathcal{A}ff(E)$ et une transformée linéaire $g \in \mathcal{Q}(E)$

Thème 38: (1 point, à raison) fait appelant son X un éventuel fin.
 tout C en question fin appelant son X un éventuel fin.
 l'ensemble de toutes les l'adon,

Definizione 39: Se q è un gruppo d'ordine n si dice gruppo di Frobenius se $n = p^a$ e a è primo.

Proposition 40: The number of colorations is equal to the number of colorations.

Puis on a $\frac{1}{24}(6^6 + 8^6 + 16^6 + 32^6 + 64^6)$ pour le contenu.

III) Construction à la règle et au compas

1) Quelques problèmes grecs

Problème 4.1: (quadrature du cercle) Il s'agit de construire un carré de même aire qu'un disque donné.

Problème 4.2: (la duplication du cube) Il s'agit de construire, à partir d'un cube donné, un cube de volume double.

Problème 4.3: (trisection de l'angle) Il s'agit de construire un angle dont la mesure est la tierce de celle d'un angle donné.

2) Utilisation des ensembles de corps

Définition 4.4: Soit P un ensemble fini de points de $\mathbb{C}$. Il existe deux figures admissibles (relativement à P) : les figures passant par deux points adjoints de P et les cercles, entiers un point de P et dont la distance est celle de deux points de P .

Définition 4.5: On dit que P est constructible, on ne peut pas à partir de P lorsqu'il existe deux figures admissibles dont l'intersection est un point de P .

Définition 4.6: On appelle points constructibles les points constructibles à partir de $\{0, 1\}$. On dit qu'un nombre réel est constructible lorsqu'il est constructible $(0, 1)$ l'ensemble.

Proposition 4.7: $\forall x \in \mathbb{Q}$, x est constructible (cf annexe).

Théorème 4.8: L'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée (cf annexe).

Lemme 4.9: Soit P un ensemble fini de points de $\mathbb{C}$ dont les coordonnées sont incluses dans un sous-corps de $\mathbb{R}$. Soit $\Pi = (x, y)$ constructible en ne pouvant pas à partir de P . Alors $\exists d \in \mathbb{K}$, $x, y \in \mathbb{K}[\sqrt{d}]$.

Théorème 5.0: (Wantzel) Soit $n \in \mathbb{N}$, n est constructible si et seulement si $\exists K_0 \subseteq \dots \subseteq K_r$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant:

- 1) $K_0 = \mathbb{Q}$
- 2) $\forall i \in [1, r]$, $\exists d_i \in K_{i-1}$ tel que $K_i = K_{i-1}(\sqrt{d_i})$
- 3) $n \in K_r$.

3) Réponses aux questions

Proposition 5.1: $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.

Proposition 5.2: $\cos(\frac{\pi}{7})$ n'est pas constructible. (AD7IS)

Proposition 5.3: π et $\sqrt{2}$ ne sont pas algébriques sur $\mathbb{Q}$ (AD7IS)