

Leçon N° 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques

Soient $d, n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de base dual. On note $X = {}^t(e_i, x_i)_{1 \leq i \leq n}$ $\forall x \in E$.

I) Généralités sur les formes quadratiques

1) Cas le plus général.

Définition 1: On appelle forme quadratique sur E toute application $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\forall x \in E, q(x) = b(x, x)$ où b est une forme bilinéaire symétrique.

On note $Q(E)$ l'ensemble de ces applications.

Définition - Proposition 2: Soit $q \in Q(E)$, il existe une forme bilinéaire symétrique b telle que $\forall x \in E, q(x) = b(x, x)$, celle-ci s'appelle l'identité de polarisation:

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Exemple 3: $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b(x, x)$ $\in Q(\mathbb{R}^n)$

et sa forme polaire associée est $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto {}^t x B y$$

Définition 4: Soit $q \in Q(E)$, la forme polaire. On appelle matrice de b (ou de q) dans B la matrice $A_q := (b(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$. Dans la suite, on conserve ces notations.

Exemple 5: Soit U un sous-espace de $\mathbb{R}^d$. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

Soit $g: (b, b) \mapsto {}^t f(b) g(b) f(b)$ est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace des bases canoniques et $\text{Hess}(g)_a = (d_{ij} g(a))_{1 \leq i, j \leq d}$.

Proposition 6: Soit B une base de E , soit P_B la matrice de passage de B à B' et $A_{q'} = {}^t P_B A_q P_B$. On a $A_{q'} = {}^t P A_q P$.

2) Caractérisation d'une forme quadratique réelle

Définition 7: 1) Rang (A_q) étant indépendant de la base, on peut

Exemples et applications.

définir le rang de $q: \text{Rang}(q) := \text{Rang}(A_q)$

2) On appelle cône isotrope de $q: C_q := \{x \in E, q(x) = 0\}$: ses éléments sont les vecteurs isotropes de q .

3) q est dite non dégénérée $\Leftrightarrow C_q = \{0\}$ et non dégénérée lorsque $\text{det}(A_q) \neq 0$

Définition 8: q est positive (resp. négative) lorsque $\forall x \in E, q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$)

Exemple 9: Soit $q \in Q^{++}(E)$, la q est un produit scalaire sur E .

Théorème 10: Supposons que $q \in Q^+(E)$, $\forall x, y \in E$, $|b_q(x, y)| \leq (q(x)q(y))^{1/2}$

Si $q \in Q^{++}(E)$, on a égalité si et seulement si x et y sont linéaires.

3) Orthogonalité et isotropie.

Soit F un sous-espace de E .

Définition 11: Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont q -orthogonaux lorsque $b_q(x, y) = 0$. On note alors $x \perp y$.

L'orthogonal de F est $F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, x \perp y\}$

Définition 12: F est isotrope lorsque il vérifie la condition équivalente suivante: $F \cap F^\perp \neq \{0\}$

(i) F est dégénérée.

Proposition 13: Si q est non dégénérée et F un sous-espace de E ,

$$\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$$

ii) F est non isotrope $\Leftrightarrow F = F^\perp$

Définition 14: $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est q -orthogonale lorsque $\forall (i, j) \in [1, n]^2, (i \neq j) \Rightarrow b_q(e_i, e_j) = 0$. Dans ce cas $q(x) = \sum_{i=1}^n q(e_i) (e_i^*(x))^2$ avec B est q -orthogonale si de plus, $\forall i \in [1, n], b_q(e_i, e_i) = 1$

Théorème 15: Il existe un bon q -orthogonal sur E .

deu
1

II) Réduction des formes quadratiques réelles.

1) Réduction de Gauss et action par congruence

Proposition 16: (réduction de Gauss) $\forall q \neq 0$, $\exists r \in \mathbb{Z}[n, n]$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}^n$ indépendantes telles que $q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ $\forall x \in \mathbb{Z}^n$.

Corollaire 17: (réduction matricielle) $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique diagonale et $\exists p(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ $\lambda_1(A) = r \leq n$.

Définition - proposition 18: $GL(E)$ (resp. $GL_n(\mathbb{R})$) agit par congruence sur $\mathcal{Q}(E)$. (resp. $Sn(\mathbb{R})$) $\forall (v, q) \in GL(E) \times \mathcal{Q}(E)$ $\mapsto (v, q) \mapsto PA^T P$.

Exemple 19: $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)$ est équivalente à $q'(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

2) Signature

Théorème 20: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base q -orthogonale de $E = \# \{i \in \{1, \dots, n\} \mid q(e_i) > 0\}$ et $t = \# \{i \in \{1, \dots, n\} \mid q(e_i) < 0\}$.

Théorème 21: Notons $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{P}$) l'ensemble des q de E tel que $q, 1, \dots, n$ soit définie positif (resp. définie négatif).

En notant $(\lambda, t) = \text{sign}(q)$, $\lambda = \max_{F \in \mathcal{P}} \dim(F)$ et $t = \max_{F \in \mathcal{O}} \dim(F)$.

Théorème 22 (signature) Si q est de signature (λ, t) , $q = \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 - \sum_{j=1}^t x_{\lambda+j}^2$ où les e_j sont les formes linéaires indépendantes. $\lambda = \left(\text{Tr} - \text{Tr}_0 \right)$ est une matrice de q pour une certaine base.

Proposition 23: La signature est invariante sous les changements.

Exemple 24: Pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mapsto L_n(\mathbb{R}^2) \mapsto L_n(\mathbb{R}^2)$ $\text{sign}(q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$

de plus, $q, 1, \dots, n$ est définie positive et $q, 1, \dots, n$ est définie négative. Théorème 25: Soit $q \in \mathbb{R}^{++}(E)$, IL existe une base de E qui est à la fois orthogonale pour q et orthogonale pour q .

III) Groupe orthogonal euclidien.

Dans cette partie q est définie positive b est un produit scalaire. Notation 26: On note $O(q)$ le groupe pour la composition des isométries de E (pour q ou b).

Proposition 27: $O(q)$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont isomorphes.

Proposition 28: Soit $u \in O(q)$, $\det(u) = \pm 1$.

Définition 29: On note $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det(u) = 1\}$.

Proposition 30: $SO(q)$ est un sous groupe algébrique de $O(q)$, O (isomorphe à $SO_n(\mathbb{R})$).

Lemme 31: Si $n \geq 3$, soient τ_1, τ_2 deux réflexions, $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$ deux rotations tel que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Théorème 32: 1) $O(q)$ est engendré par les réflexions, plus précisément si u est dans $O(q)$, u est produit d'un plus n réflexions.

2) Si $n \geq 3$: $SO(q)$ est engendré par les rotations, plus précisément si u est dans $SO(q)$ u est produit d'un plus n rotations.

Remarque 33: (alternance) Le théorème est vrai dans un cadre plus général, (corps quelconque (car $\neq 2$)), q non dégénérée.

IV) Application en analyse.

Proposition 34: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$.
 1) f admet un minimum local en a et si $D_a^2 f$ est constante alors:
 $D_a f = 0$, $D_a^2 f \in \mathcal{Q}^+(\mathbb{R}^d)$

2) si $D_a f = 0$ et $D_a^2 f \in \mathcal{Q}^+(\mathbb{R}^d)$, alors f admet un minimum local strict en a .

Exemple 35: Soit $b \in \mathbb{R}^d$, $A \in \text{SL}(\mathbb{R})$ inversé positif.

$g: x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{2} Ax, x > -\frac{1}{2}b, x > 0$ admet un minimum, solution de $Ax = b$

V) Coniques

1) Définition.

Définition 36: Soit f une fonction polynôme de degré 2 sur $\mathbb{R}^2$.

f s'écrit $ax^2 + by^2 + c$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$g(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$

$h(x, y) = dx + ey \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)^*$

$w \in \mathbb{R}^2$.

On définit la conique associée à f par $E_f = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$.

Remarque 37: $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $E_f = \emptyset$ si $f \neq 0$ car $f = 0$.

On conviendra par la suite ces notations.

2) Classification affine

Notations 38: On note $\mathcal{GA}(P)$ le groupe affine de P .

On note $\mathcal{GA}(P)$ le sous-groupe de $\mathcal{GA}(P)$ les automorphismes fixes O .

Proposition 39: $\mathcal{GA}(P)$ agit sur l'ensemble des coniques de P par:

$(g, x) \mapsto g(gx) = E_{g \circ g^{-1}}$.

Théorème 40: $\exists g \in \mathcal{GA}(P)$ telle que g envoie E_f sur E une et une seule des coniques d'équation canoniques:

1) $x^2 + y^2 = 1$ (ellipse)

2) $x^2 - y^2 = 0$ (deux droites)

3) $x^2 - y^2 = 1$ (hyperbole)
 4) $x^2 = 1$ (deux parallèles)
 5) $x^2 + y = 0$ (parabole)
 6) $x^2 = 0$ (deux droites)

Proposition 41: Soit $\Delta = ac - b^2 = \det(A)$

1) si $\Delta > 0$, E_f est une ellipse

2) si $\Delta = 0$, E_f est une parabole, deux droites parallèles ou une droite.

3) si $\Delta < 0$, E_f est une hyperbole ou deux droites sécantes.

3) Classification euclidienne

On suppose ici P euclidien.

Théorème 42: Il existe un isomorphisme affine g de P qui envoie E_f sur une et une seule des coniques d'équation canoniques:

1) $ax^2 + by^2 = 1$ ($0 < a \leq b$) 2) $ax^2 - by^2 = 1$ ($0 < a, b$)

3) $x^2 - \Delta y^2 = 0$ ($0 < \Delta \leq 1$) 4) $x^2 + sy = 0$ ($s > 0$)

5) $x^2 - \Delta^2 = 0$ ($\Delta > 0$) 6) $x^2 = 0$.

Remarque 43: Une conique est une section plane d'un cône.

Proposition 44: Soit P une droite de P , $F \in P \setminus P$ et $c > 0$.

L'ensemble $E = \{x \in P, d(x, F) = c\}$ est une conique de plan, si $c < 1$, c'est une ellipse

si $c = 1$, c'est une parabole

si $c > 1$, c'est une hyperbole (fommes)

Proportionnellement, toute conique peut s'écrire sous cette notation.

Définition 45: F est appelé foyer de E , D directrice et e l'excentricité.