

Leçon N°170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Dans toute cette leçon, V est un corp commutatif tel que $\text{car}(V) \neq 2$, E est un V -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I) Formes quadratiques

1) Présentation

Définition 1: Une application $q: E \rightarrow V$ est une forme bilinéaire lorsque $\forall x, y \in E$, $q(x, \cdot)$ est linéaire.

De plus, elle est dite symétrique lorsque $\forall (x, y) \in E$, $q(x, y) = q(y, x)$.

Définition 2: $q: E \rightarrow V$ est une forme quadratique lorsque il $\exists$ une forme bilinéaire symétrique telle que $\forall x \in E$, $q(x) = f(x, x)$.

Proposition 3: Soit $q: E \rightarrow V$ une forme quadratique, $\exists !$ f forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = f(x, x)$, celle-ci s'écrit :

$\forall (x, y) \in E^2$, $f(x, y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y))$ (formule de polarisation)

Exemple 4: $q(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 \mapsto (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_2^2$

Exemple 5: Soit $q: E \rightarrow E^*$

$q \mapsto (f_y: x \mapsto f(x, y))$

On appelle noyau de q ou de f le noyau de q ou de f .

Proposition 6: On définit le rang de q par $\text{rang}(q) = \dim(\text{Im } q)$.

Exemple 7: Pour $q(x_1, x_2) = x_1^2$, $\text{rang}(q) = 1$.

Exemple 8: Soit $f = (a_1, \dots, a_n)$ une base de E et f une forme bilinéaire symétrique, associée à q . f est alors entièrement déterminée.

par $A_f = Aq = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}(n, V)$.

Proposition 9: Soit $(x, y) \in E$, X et Y les matrices colonnes de x et y dans la base B . Alors $f(x, y) = X^t A_f Y$ et $q(x) = X^t A_f X$.

Proposition 10: $\text{ker}(A_f) = \text{ker}(q)$ et $\text{rg}(A_f) = \text{rg}(q)$.

Proposition 11: Soit B' une autre base de E , P la matrice de passage de B à B' alors $A_{B'}, B' = P^t A_f P$.

II) Orthogonalité et isotropie.

Dans tout ce qui suit, q est une forme quadratique non dégénérée.

Définition 12: Soit $(x, y) \in E^2$, on dit que x et y sont orthogonaux (par f) lorsque $f(x, y) = 0$. On le note $x \perp y$.

Soit $(A, B) \in (E)^2$ sont orthogonaux lorsque $\forall (x, y) \in A \times B$, $x \perp y$.

Définition 13: Soit $A \subseteq E$, on définit l'orthogonal de A par $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, x \perp a\}$.

Proposition 14: $A^\perp$ est un sev de E .

Proposition 15: Soit A un sev de E , alors $\dim(A) + \dim(A^\perp) = n$.

Proposition 16: Soit A un sev de E , alors $(A^\perp)^\perp = A$.

$(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$; $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

2) Isotropie.

Dans cette section, A est un sev de E .

Définition 17: On dit que $x \in E$ est isotrope (par q) lorsque $q(x) = 0$.

Exemple 18: A est isotrope lorsque $A \cap A^\perp \neq \{0\}$, i.e. $q|_A$ est dégénérée.

3) A est totalement isotrope lorsque $A \subseteq A^\perp$, i.e. $q|_A = 0$.

Définition 18: On définit l'indice de q par: $v(q) = \min \{ \dim(A) \mid A \text{ totalement isotrope} \}$.

Proposition 19: $v(q) \leq n/2$.

Définition 20: On définit le cône isotrope de q par $C_q = \{x \in E, q(x) = 0\}$.

Proposition 21: $\dim(q) \subseteq C_q$.

Exemple 22: Pour $u = 0$, $q(z_1, z_2) \mapsto z_1^2 + z_2^2$, alors $C_q = \{z_1, z_2\} \in \mathbb{C}^2$ car $z_1 = iz_2$ ou $z_1 = -iz_2$.

Lemme 23: Soit F un sous-esp. de E .

On a $\dim(F^\perp) + \dim(F) \geq \dim(E)$ avec égalité si q est non dégénérée.

$E = F \oplus F^\perp$ si $q|_F$ est non dégénérée.

Définition 24: q est définie si $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Exemple 25: La norme (associée à un produit scalaire) est définie car un forme quadratique définie positive.

3) Formes orthogonales

Définition 26: Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On dit qu'elle est orthogonale pour q lorsque $q(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$, on a e.i.e.s. Théorème 27: Il existe une base orthogonale pour q .

Proposition 28: Dans le cas q définie positive, à toute base B de E , on peut lui associer une base B' orthogonale par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Proposition 29: Toute forme quadratique peut s'écrire comme $q = \sum_{i=1}^r \epsilon_i x_i^2$ car $r \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r \in \{1, -1\}$, $x_1, \dots, x_r \in E$ linéairement indépendants.

Remarque 30: On obtient ceci par l'algorithme de Gauss.

III) Invariants

Définition 31: On dit que q et q' sont équivalentes si q et q' ont même rang r et $q \mapsto q'$ un isomorphisme d'espaces vectoriels tel que $q' = q \circ \varphi$.

Proposition 32: Si q et q' sont équivalentes, alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A_{q'} = PAP^t$.

Définition 33: On définit le discriminant de q par:

$$\text{disc}(q) = [\det(A(q))] \in \mathbb{K}^* / \mathbb{K}^{*2}$$

$$\text{Exemple 34: } \mathbb{C}^{2,2} = \mathbb{C}^4, \mathbb{K}^{2,2} = \mathbb{R}^4$$

Proposition 35: $\text{disc}(q), \text{disc}(q')$ et $\text{disc}(q)$ sont des invariants pour la relation d'équivalence.

IV) Étude de applications sur des cas particuliers

1) Cas complexe

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 36: Soit $r \in [0, n]$, toutes les formes quadratiques de rang r sont équivalentes. Don une base B convenable, on a $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$ et

$$\text{disc}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

2) Cas réel

Ici $K = \mathbb{R}$. Soit q une forme quadratique sur E .

Théorème 37: $\exists ! (a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $V(e_i) \ 1 \leq i \leq n$ base orthogonale

$\lambda = \# \{ i \in \{1, n\} \mid \text{tel que } q(e_i) > 0 \}$ et $b = \# \{ i \in \{1, n\} \mid \text{tel que } q(e_i) < 0 \}$

On a $s+t = \text{rang}(q)$ et $(a, b) := \text{sign}(q)$

Proposition 38: Notons P et N l'ensemble des s et t de

tel que $q|_P$ est déf > 0 (resp $\text{Def} < 0$)

En notant $(a, b) = \text{sign}(q)$ et $\lambda = \text{rang}(F)$

et $t = \text{rang}(F)$

$F \in \mathbb{R}^n$

Théorème 39 (Sylvester) Si q est de signature (a, b) ,

$$q = \sum_{i=1}^a e_i^2 - \sum_{j=1}^b e_j^2$$

où les e_i sont des formes linéaires indépendantes

$D = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & -I_b \end{pmatrix}$ est une matrice A pour une autre base.

Lemme 40: Si $n \geq 3$, τ_1, τ_2 deux réflexions,

$\exists \tau_1, \tau_2$ nécessairement tel que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_u \sigma_v$.

Proposition 41: Si q est définie positive.

1) $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales, plus précisément

N est dans $O(E)$, et est produit d'un plus ou réflexions.

2) Si $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les réflexions, plus précisément, si u est dans $SO(E)$ et est produit d'un plus ou réflexions.

Définition 42: Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Soit $\alpha \in U$, on définit le matrice hessienne de f en α par la

$$\text{matrice } n \times n: \forall i, j \in \{1, n\}, (H(f)(\alpha))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\alpha)$$

Proposition 43: Sous les mêmes hypothèses, $H(f)(\alpha) \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$.

Proposition 44: Soit α la forme quadratique associée à $H(f)(\alpha)$

$$\text{Alors si } Df_\alpha = 0: f(a+b) - f(a) = \frac{Df_\alpha(b)}{2} + o(\|b\|^2)$$

3) Sur les corps réels

Ici p est premier $\neq 2$ et $K = \mathbb{F}_p$ car $q = p$.

Théorème 45: Il existe deux classes d'équivalences pour les

formes quadratiques de rang $r \in \{1, n\}$, une de discriminant 1

et l'autre de discriminant α où $\alpha \in K^* \setminus \{1\}$ pour un carré dans $\mathbb{F}_p$.

Lemme 46: Soit $a \in \mathbb{F}_p^*$.

$$\text{On a: } |\{x \in \mathbb{F}_p, ax^2 = 1\}| = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$$

Définition 47: Pour p premier, on définit la fonction caractéristique

$$\text{et } \chi \in \mathbb{F}_p^*: \left(\frac{a}{p}\right) = \chi(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ -1 & \text{si } a \text{ n'est pas un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

(On se rappelle qu'il y a une bijection entre $\mathbb{F}_p^*$ et $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$)

Théorème 48: Soient p_1, p_2 deux nombres premiers impairs distincts

$$\text{Alors } \left(\frac{p_1}{p_2}\right) \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = (-1)^{\frac{p_1-1}{2} \frac{p_2-1}{2}}$$