

Leçon N° 162

Systèmes d'équations linéaires, opérations, éléments, aspects algorithmiques et computationnels (Lectures)

Dans toute cette leçon, K est un corps commutatif de $n, p \in \mathbb{N}^*$.
On identifie K^n avec les vecteurs colonnes $\mathbb{M}(n, 1, K)$.

I) Systèmes d'équations linéaires

1) Définition et première propriété

Définition 1: On appelle système d'équations linéaires un système du type
(S) : $\forall i \in \{1, \dots, p\}, a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$.

où les coefficients a_{ij} et b_i sont dans K et où les x_i sont des inconnues. Le système est dit homogène lorsque $b_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, p\}$.
Résoudre le système signifie déterminer les $x_i \in K$ qui vérifient toutes les équations.

Le système est dit compatible lorsqu'il existe au moins une solution.
Remarque 2: Le système se réécrit sous la forme $Ax = b$ où
 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{M}(p, n, K)$ $b = (b_i)_{1 \leq i \leq p} \in K^p$
et $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$.

Proposition 3: En notant $a_1, \dots, a_n$ les colonnes de la matrice A et dans le système se réécrit aussi $x a_1 + \dots + x_n a_n = b$, et celui-ci est compatiblessi $b \in \text{Vect}(a_1, \dots, a_n)$.

Proposition 4: L'ensemble des solutions du système (S) ne change pas lorsqu'on effectue les opérations élémentaires suivantes:

- 1) Permuter les équations
- 2) multiplier une équation par un scalaire $\neq 0$.
- 3) ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres.

2) Système de Cramer

Définition 5: Le système (S) est dit de Cramer lorsque A est carré et inversible.

Proposition 6: Si (S) est de Cramer, alors il admet toujours une unique solution donnée par $x = A^{-1}b$.

Proposition 7: Si le système (S) est de Cramer, son unique solution est donnée par $\forall j \in \{1, \dots, n\}, x_j = \frac{\det(C_j)}{\det(A)}$ où C_j est la matrice obtenue en remplaçant la j -ième colonne de A par le vecteur b .

Théorème 8: On suppose que la matrice A est $n \times n$ et que $\det(A) \neq 0$. On extrait de la matrice A un mineur S d'ordre r non nul, quel que soit r . On change la notation, on peut supposer $S = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0$.

1) Le système (S) est compatiblessi tous les déterminants associés à S sont nuls: $\forall j \in \{r+1, \dots, n\}, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \end{vmatrix} = 0$.

2) Si cette condition est suffisante, le système est équivalent au système des équations principales:

$\forall i \in \{1, \dots, r\}, a_{i1}x_1 + \dots + a_{ir}x_r + \dots + a_{in}x_n = b_i - a_{i,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{i,n}x_n$.
Il admet alors une infinité de solutions dépendantes de $n-r$ paramètres qui forment un espace affine de dimension $n-r$. Les solutions se calculent en résolvant le système de Cramer obtenu en demandant aux variables libres $x_{r+1}, \dots, x_n$ des valeurs arbitraires.

Application 9: Soit $A \in \mathbb{M}(n, K)$. La somme des constantes de A , i.e. $\sum_{i,j} a_{ij} = \text{tr}(A)$, est égale à $\det(A)$ si et seulement si A est circulaire.

Application 10: $\mathcal{C}(A) = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ est un sous-espace de K^n .
Application 11: Si U est un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{C}(A) = U$ si et seulement si $A = 0$.

Corollaire 12: Le système (S) homogène $Ax = 0$ admet comme solution non nulle $\iff \det(A) = 0$.

II) Pivot de Gauss.

1) Opérations élémentaires

Notation 13: On note $E_{i,j} = (S(q,p) = (i,j))$ $1 \leq i \leq n$ $1 \leq j \leq n$ $A \in M_n, p(A)$

Définition 14: Une matrice de dérotation est de la forme

$$D_{i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \alpha & \sin \alpha & \\ & -\sin \alpha & \cos \alpha & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } 1 \text{ position } (i,i)$$

Définition 15: Une matrice de transvection est de la forme

$$T_{i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \alpha & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \alpha \text{ est en position } (i,j) \quad (i \neq j)$$

Définition 16: Une matrice de permutation est de la forme

$$S_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq i \\ \leq j \\ \leq i \\ \leq j \end{matrix}$$

Proposition 17: Les opérations élémentaires de reformulation arithmétique:

- 1) Faire $L_i \leftarrow \alpha L_i$ revient à multiplier à gauche de A par $D_{i,i}(\alpha)$
- 2) Faire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ revient à multiplier à gauche de A par $T_{i,j}(\alpha)$
- 3) Faire $L_i \leftrightarrow L_j$ revient à multiplier à gauche de A par $S_{i,j}$.

2) Matrices échelonnées

Définition 18: Le pivot d'une ligne, non nulle de A est le coefficient non nul situé le plus à gauche.

Définition 19: Une matrice est dite échelonnée en ligne lorsque

- 1) si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont.
- 2) Le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que le pivot des lignes précédentes.

Définition 20: Une matrice est dite échelonnée réduite en ligne lorsque elle est échelonnée et lorsque ses pivots valent 1 et si à part les seuls coefficients non nuls de lignes colonnes.

Théorème 21: Toute matrice $M \in M_n, p(M)$ peut se mettre sous la forme échelonnée en faisant des opérations élémentaires sur les lignes.

3) Algorithme de pivot de Gauss

Algorithme 22: (Gauss) pour mettre sous forme échelonnée $M \in M_n, p(M)$, on peut appliquer l'algorithme suivant.

On note c le plus petit indice tel que la colonne c soit non nulle.

On choisit $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $a_{i,c} \neq 0$. Si $i \neq 1$, on fait $L_1 \leftrightarrow L_i$.

On a ainsi $a_{1,c} \neq 0$, c'est le pivot de la 1^{ère} ligne.

On fait $L_i \leftarrow L_i - a_{i,c} a_{1,c}^{-1} L_1 \quad \forall i \in \{2, \dots, m\}$.

On recommence avec la matrice A' obtenue par

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,c}^{-1} & \dots \\ 0 & & & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Théorème 23: Toute matrice peut se mettre sous forme échelonnée réduite d'une unique manière par opérations élémentaires sur les lignes.

III) Applications

1) Algèbre linéaire

Exemple 24: Dans $\mathbb{R}^4$, considérons $v_1 = (1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$, $v_3 = (4, 5, 9, -1)$, $w_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_2 = (3, -4, 4, 2)$ et on pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \text{Vect}(w_1, w_2)$. Une base de F est (v_1, v_2, v_3) et G est (w_1, w_2) . On a $F \cap G = \{0\}$.

Proposition 25: (Cramer) Soient F et G deux ser de E

$$\text{On a } \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Proposition 26: L'algorithme de pivot de Gauss se fait en $O(n^3)$

Opération élimination dans M_n pour une matrice $P \in M_n(K)$

Proposition 27: Deux matrices sont équivalentes ssi elle ont même rang.

Définition 28: On considère l'équation de $G_n(K)$ sur $M_n, p(K)$

$$\text{donnée par } (P, P') \in G_n(K) \times M_n(K) \mapsto P'P \in M_n, p(K)$$

Théorème 29: Deux matrices P et N de $M_n, p(K)$ sont dans la même orbite si elles ont même rang. Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite en diagonale

Théorème 30: Les matrices de transformations engendrent $GL_n(M_n)$

Application 31: $SL_n(M_n)$ est connexe par arcs pour $n \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.

Théorème 32: Les matrices de dilatations et de translations engendrent $GL_n(M_n)$.

Application 33: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

Application 34: Le centre de $GL_n(K)$ est isomorphe à K^* .

2) Décomposition classique de matrices

Théorème 35: (LU) Soit $A \in M_n(K)$ dont toutes les sous matrices d'ordre k diagonales sont inversibles. $\exists! (L, U)$ avec $L \in T_n^+(K)$, $U \in T_n^+(K)$ et $L^{-1} = I$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $A = LU$.

Théorème 36: (Cholesky) Soit $A \in S_n^{++}(K)$, $\exists! B \in T_n^+(K)$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $B_i^i > 0$ et $A = BB^T$

Théorème 37: (QR) Soit $A \in M_n(K)$, $\exists!$ $Q \in O_n(K)$ et $R \in T_n^+(K)$ tel que $A = QR$.

3) Méthodes itératives

Proposition 38: Soit $\| \cdot \|$ une norme matricielle définie sur $M_n(K)$ On a $\rho(A) \leq \|A\|$. Réciproquement, $\forall A \in M_n(K)$ et $\varepsilon > 0$, $\exists$ une norme subordonnée $\| \cdot \|_A$ telle que $\|A\|_A \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Lemme 39: Soit $A \in M_n(K)$, il y a équivalence entre:

$$i) A \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

$$ii) \forall x \in \mathbb{C}^n, A^n x \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

$$iii) \rho(A) < 1$$

$$iv) \exists \text{ une norme matricielle subordonnée telle que } \|A\| < 1$$

Théorème 34: Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, on veut résoudre $Ax = b$

Soit $(\Pi, N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ tel que $A = \Pi - N$ On considère

$$\text{La méthode itérative: } \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = \Pi x_k + b \end{cases}$$

Cette méthode converge si $\rho(\Pi^{-1}N) < 1$

Exemple 35: (Jacobi) $D = \text{diag}(a_{ii})$ $P = D$, $N = D - A$.

Elle converge si A est diagonale strictement dominante ou $A \in S_n^{++}(K)$