Leçon N° 161 : Espaces vectorels et espaces affines euclidiens : distances et isométries.

Dans cette leçon, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux espaces affines euclidiens dirigés respectivement par $(\vec{E}, \langle \cdot,\cdot \rangle_E)$ et $(\vec{F}, \langle \cdot,\cdot \rangle_F)$.

I) Présentations

1) Applications affines

Définition 1 : Une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine lorsqu'il $\exists$ $O \in \mathcal{E}$ et une application linéaire $f : \vec{E} \to \vec{F}$ telle que : $\forall \Pi \in \mathcal{E}$, $f(\vec{O\Pi}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(\Pi)}$

On note alors $\vec{\varphi} = f$ la partie linéaire de φ.

Proposition 2 : $\vec{\varphi}$ ne dépend pas du choix de O dans la définition.

Exemples 3 : 1) $q : \begin{array}{l} E \to F \\ O \mapsto A \end{array}$ constante est affine, et $\vec{q} = 0$.

2) Les translations sont les applications de partie linéaire l'identité. Une translation est de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{\Pi\varphi(\Pi)} \in \vec{E}$ indépendant de Π, on la note $t_{\vec{v}}$.

Proposition 4 : Une application φ affine est bijective ssi $\vec{\varphi}$ l'est et dans ce cas, $\overrightarrow{\varphi^{-1}} = \vec{\varphi}^{-1}$

3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $O \in \mathcal{E}$, φ telle que $\forall \Pi \in E$, $\overrightarrow{O\varphi(\Pi)} = \lambda \vec{O\Pi}$ est l'homothétie de centre et de rapport λ. Sa partie linéaire est $\lambda\, Id_E$.

Proposition 4 : 1) Soient $\varphi : E \to F$, $\psi : F \to G$ affines, leur composée $\psi \circ \varphi : E \to G$ est affine et $\overrightarrow{\psi \circ \varphi} = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}$.

Corollaire 5 : Les bijections affines de E dans E forment un groupe pour la composition, noté $GA(E)$.

Proposition 6 : Soient $f : \vec{E} \to \vec{F}$ linéaire, $O \in E$ et $A \in F$. $\exists! \varphi : E \to F$ affine telle que $\varphi(O) = O'$ et $\vec{\varphi} = f$.

Proposition 7 : $\begin{array}{l} GA(E) \to GL(\vec{E}) \\ \varphi \mapsto \vec{\varphi} \end{array}$ est un morphisme de groupe surjectif dont le noyau sont les translations.

Corollaire 8 : Si $O \in E$, toute $\varphi \in GA(E)$ s'écrit $\varphi = t_{\vec{u}} \circ \psi$ où ψ fixe O. Cette écriture est unique.

Théorème 9 : Soit φ transformation affine de E. Si $\vec{E} = \ker(\vec{\varphi} - Id) \oplus \mathrm{Im}(\vec{\varphi} - Id)$, $\exists! (\vec{v}, \psi) \in \vec{E} \times GA(E)$ tels que $\vec{\varphi}(\vec{v}) = \vec{v}$, $\varphi = t_{\vec{v}} \circ \psi$, $t_{\vec{v}} \circ \psi = \psi \circ t_{\vec{v}}$

2) Notion de distance et d'isométries

Définition 10 : Un espace affine E est euclidien lorsque $\vec{E}$ est euclidien. On pose alors la distance entre A et $B \in E$ comme $\|\vec{AB}\| := \sqrt{\langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle}$

Définition 11 : 1) Une isométrie vectorielle est $f : \vec{E} \to \vec{F}$ application linéaire telle que $\forall u \in \vec{E}$, $\|f(u)\| = \|u\|$.

$O(E)$ est le groupe orthogonal de E, l'ensemble de ses isométries.

2) Une isométrie affine est $\varphi : E \to F$ une application affine qui conserve les distances. On note $Is(E)$ l'ensemble des isométries affines de E.

Exemple 12 : 1) Les translations sont des isométries affines.

2) Les homothéties de rapport λ sont des isométries ssi $\lambda = \pm 1$

3) Les symétries orthogonales sont des isométries affines.

3) Matrices et déterminants de Gram

Définition 13 : Ici E est un préhilbertien réel. Soient $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$. On appelle matrice de Gram la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \le i,j \le k}$. On note $G(x_1, \dots, x_k)$ son déterminant, appelé déterminant de Gram.

Proposition 14 : Toute matrice de Gram est symétrique positive et réciproquement. De plus, la matrice de Gram de n vecteurs est définie ssi les n vecteurs sont libres.

dev 1

Théorème 15 : Soit $V \subset E$ un sev de dimension $< +\infty$ de E muni d'une base $(e_i)_{1 \le i \le k}$. Soit $x \in E$, soit $d = d(x, V)$.

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_k, x)}{G(e_1, \dots, e_k)}$$

Exemple 16 : Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Sa matrice de covariance est une matrice de Gram.

II) Étude du groupe orthogonal

1) Générateurs et réduction

Définition 17 : $O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tAA = I_n \}$.

Proposition 18 : $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont isomorphes.

Proposition 19 : Si $u \in O(E)$, $\det(u) = \pm 1$.

Définition 20 : $SO(E) = \{ u \in O(E) \text{ tq } \det(u) = 1 \}$.

Théorème 21 : $Z(O(E)) = \{ \pm Id \}$

$n \geq 3$, $Z(SO(E)) = \{ Id \}$ si n impair
$= \{ \pm Id \}$ si n pair.

Lemme 22 : Si $n \geq 3$, soient τ_1, τ_2 deux réflexions, $\exists \sigma_1, \sigma_2$ renversements tel que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Théorème 23 : 1) $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales, plus précisément, si u est dans $O(E)$, u est produit d'au plus n réflexions.

2) ~~Soit~~ Si $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements. Plus précisément si u est dans $SO(E)$, u est produit d'au plus n renversements.

Théorème 24 : Si $u \in O(E)$, il existe une BON telle que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} \quad \text{où } p+q+2r = n$$

et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2) Topologie et structure

Proposition 25 : $O(E) \triangleleft GL(E)$, $O_n(\mathbb{R}) \triangleleft M_n(\mathbb{R})$, $SO(E) \triangleleft O(E)$ et $O_n^+(\mathbb{R}) \triangleleft O_n(\mathbb{R})$

Proposition 28 : $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Ses deux composantes connexes sont $O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

Théorème 27 : $\varphi : \begin{array}{l} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) \longmapsto OS \end{array}$ est un homéomorphisme (décomposition polaire).

Théorème 28 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

3) Et pour le cas affine ?

Définition 29 : $Is^+(\mathcal{E})$ est le groupe des isométries positives de $\mathcal{E}$. On les appelle les déplacements de $\mathcal{E}$.

Proposition 30 : $Is(E) \triangleleft GA(E)$ et $Is^+(E) \triangleleft Is(E)$.

Proposition 31 : Les éléments de $Is(E)$ sont engendrés par au plus $n+1$ réflexions. Si $n = \mathrm{rg}(\vec{\varphi} - Id)$, φ est produit de :

- n réflexions lorsque φ admet un point fixe.
- $n+2$ sinon.

III) Étude en petites dimensions

1) Dimension 2

Ici $E = \mathbb{R}^2$.

Proposition 32 : Soit $u \in O(\mathbb{R}^2)$. u est l'un des éléments suivants :

- l'identité
- une réflexion
- une rotation.

Proposition 33 : Soit $\varphi \in Is(\mathbb{R}^2)$.

1) Si $\vec{\varphi} = Id$, φ est une translation.

dev pomme

dev pomme

2) Si $\vec{\varphi}$ est une réflexion de droite D,

a) Si $\vec{\varphi}$ a un point fixe $A \in E$, c'est la réflexion par rapport à la droite affine passant par A et dirigée par D.

b) Sinon, φ est une symétrie glissée par rapport à D, selon $\vec{u} \in D$.

3) Si $\vec{\varphi}$ est une rotation, φ est une rotation affine de centre A, point fixe de φ.

Proposition 34: En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ via une BON, les rotations vectorielles sont les $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto (a+ib)z$, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a^2+b^2=1$

Proposition 35: $O_2^+(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{U}$ via $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longmapsto a+ib$. naturellement.

Proposition 36: Un polygône à $n \geq 3$ côtés a pour groupe d'isométries D_{2n} le groupe diédral, qui contient un sous groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, son groupe de déplacements. (cf annexe)

2) En dimension 3

Ici $E = \mathbb{R}^3$

Proposition 37. La matrice d'une isométrie vectorielle est de l'une de ces formes suivantes :

- I_3, c'est l'identité
- $\begin{pmatrix} I_2 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, réflexion
- $\begin{pmatrix} 1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}$, rotation autour de l'axe engendré par le premier vecteur
- $\begin{pmatrix} -1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}$, antirotation.

Proposition 38: classification de $Is(\mathbb{R}^3)$

point fixe \ $\vec{\varphi}$	identité	reflexion de plan P.	rotation d'axe D	Anti-rotation
Oui $A \in \mathbb{R}^3$	Identité	Reflexion par rapport au plan P passant par A	rotation d'axe la droite passant par A, dirigée par D	Anti rotation sur $\mathbb{R}^3$ vectorialisé en A.
non	translation	symétrie glissée orthogonale si $\varphi = t_{\vec{v}} \circ \psi$, $\vec{v} \in P$, ψ reflexion de plan dirigée par P	vissage d'axe dirigé par D de vecteur $\vec{v} \in D$.	$\emptyset$.

Théorème 39: Les groupes d'isométries du cube sont :

- $Is^+(C_6) \simeq S_4$
- $Is(C_6) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

dev 2.

Lemme 40: (Formule de Burnside) Soit G un groupe fini opérant sur E un ensemble fini. Ω : l'ensemble des orbites de E.

Alors $|\Omega| = \frac{1}{G} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$.

Application 41 : Le nombre de coloriages du cube à isométries positives près est $\frac{1}{24}(c^6 + 8c^2 + 6c^3 + 3c^4 + 6c^3)$ pour c couleurs.

dev 2