

Leçon N° 159

Formes linéaires et dualité en dimension finie Exemples et applications

On note V un corps et E un V -espace vectoriel de dimension finie.

I) Dual d'un espace vectoriel et orthogonalité.

1) Formes linéaires et espace dual

Définition 1: On appelle forme linéaire sur E tout élément de $\mathcal{L}(E, V)$. On appelle dual de E et on note $E^* = \mathcal{L}(E, V)$.

Proposition 2: Soient $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E .

Soit $1 \leq i \leq n$. On pose $e_i^* = \{e_1, \dots, e_n\} \rightarrow V \rightarrow V$ par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

La famille $B^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de E^* , appelée base dual de B .

Corollaire 3: $\dim E^* = \dim E$ et donc $E^* \cong E$.

Exemple 4: Soit la base de $\mathbb{R}^3$: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B^* = \left\{ (-1, 1, 0), (1, -1, 0), (-2, 1, 1) \right\}$.

Exemple 5: Soit $E = C^1[0, 1]$. Soit la base de E : $= \{1, x, \dots, x^n\}$. La base dual de B est $B^* = \{d_0, d_1, \dots, d_n\}$ où $d_i(f) = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$.

Application 6: Dans $\mathbb{R}^n$, les bases normées sont conjuguées.

Proposition 7: $(M_n(\mathbb{R}))^* = \{A \mapsto \text{tr}(AA^T), A \in M_n(\mathbb{R})\}$.

Lemme 8: $\forall f \in (M_n(\mathbb{R}))^*, \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), f(X) = \lambda \text{tr}(X)$.

Application 9: $\forall n \geq 2$, tout isomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ est nul.

Application 10: Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre:

- i) $\exists X \in M_n(\mathbb{R}), AX + XA = B$
- ii) $\forall C \in M_n(\mathbb{R}), \text{tr}(CA) = 0 \Rightarrow \text{tr}(BC) = 0$.

Définition 11: On appelle noyau de $E: E^* \rightarrow E^*$.

Proposition 12: $\mathcal{K} \subset E^* \rightarrow E^*$ est un isomorphisme $\alpha \mapsto \{ \varphi \mapsto \varphi(\alpha) \}$ entre $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^*$.

Corollaire 13: Soit $B^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ une base de E^* . $\exists!$ base B de E telle que $B^* = B^*$ appelée base orthogonale de B^* .

2) Orthogonalité et hyperplan

Définition 14: Soit X une partie de E , Y partie de E^* non vides. X orthogonal à Y si $\forall x \in X, \forall y \in Y, y(x) = 0$.

X orthogonal à Y si $\forall x \in X, \forall y \in Y, y(x) = 0$. X orthogonal à Y si $\forall x \in X, \forall y \in Y, y(x) = 0$.

Proposition 15: Soient A, B deux parties non vides de E , U, V parties non vides de E^* . $1) A \perp B \Rightarrow B \perp A^*$ et $U \subset V \Rightarrow U^\perp \supset V^\perp$. $2) A \perp (B \cup C) \Leftrightarrow A \perp B$ et $A \perp C$.

Proposition 16: Soit F un sous-espace de E , G un sous-espace de E^* . $1) \dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $n = \dim(G) + \dim(G^\perp)$. $2) F = (F^\perp)^\perp$ et $G = (G^\perp)^\perp$.

Définition 17: Un sous-espace H de E est un hyperplan si $\exists \varphi \in E^*$ tel que $H = \ker(\varphi)$.

Soit $\dim(H) = n-1$.

Remarque 18: Soit $V = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ un sous-espace de E .

problème de dimension linéaire

de E . Trouver un système d'équations linéaires définissant V revient à trouver une base de $V^\perp$.

Proposition 19: Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille de sev de E .

$$\left(\bigcap_{i=1}^m F_i \right)^\perp = \bigcap_{i=1}^m F_i^\perp$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^m F_i \right)^\perp = \left(\bigcap_{i=1}^m F_i^\perp \right)^\perp$$

Théorème 20: Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille de sev, $n \in \mathbb{N}$ et E et V $1 \leq i \leq r$, $M_i = \dim F_i$. Alors $\dim \left(\bigcap_{i=1}^r F_i \right) = n - r$.

Réciproquement, soit F un sev de E de dimension $m \leq n$. Alors $\exists (F_1, \dots, F_{n-m})$ une famille line de E telle que $F = \bigcap_{i=1}^{n-m} F_i$.

II) Transposition et réduction d'endomorphismes

1) Transposition.

E, F est un K -ev de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Définition 21: Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle application transposée de u ; ${}^t u \in \mathcal{L}(F, E)$ définie par ${}^t u: F \rightarrow E$
 ${}^t ({}^t u) = u$.

Proposition 22: ${}^t({}^t u)$ application $u \mapsto {}^t u$ est linéaire

a) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, ${}^t(u+v) = {}^t u + {}^t v$
 b) ${}^t({}^t u) = u$, ${}^t u \in \mathcal{L}(F, E)$ et ${}^t({}^t u) = u$.

Proposition 23: Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\ker({}^t u) = \text{Im}(u)^\perp$ et $\text{Im}({}^t u) = \ker(u)^\perp$.

Corollaire 24: u est injective si et seulement si ${}^t u$ est surjective et u surjective

si et seulement si ${}^t u$ est injective.

Proposition 25: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, soient $\rightarrow$ et $\leftarrow$ base de E , soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $A = \text{Mat}_B^A(u)$. Alors ${}^t A = \text{Mat}_{B^*}^{A^*}({}^t u)$.

Proposition 26: Soit B un sev de E . C'est stable par u si et seulement si $B^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Lemme 27: ${}^t({}^t u) = u$ $\forall u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 28: $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable si et seulement si A est symétrique dans $\mathcal{M}_n(K)$.

Lemme 29: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. $\forall v \in E$ on a ${}^t u^{q-1} v = 0$ de dimension finie tel que $u^{q-1}(v) \neq 0$.

La famille $B_u, u = (u^q(v))$ est line et l'épave vectoriel $F = \text{Vect}(B_u, u)$ est stable par u .

Lemme 30: Soit E est de dimension finie et u un endomorphisme de E nilpotent d'ordre $q \geq 1$. $\exists \varphi \in \mathcal{L}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que ${}^t u \cdot \varphi = \text{Vect}(u, u^2, \dots, u^{q-1}(u))$ et l'orthogonal G de ${}^t u$ de $H = \text{Vect}(\varphi, u(\varphi), \dots, u^{q-1}(\varphi))$ sont stable, par u avec ${}^t u = F \oplus G$.

Théorème 31: (réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Il existe une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, E_i est stable par u et, dans une certaine base B_i de E_i , $u|_{E_i} = \text{dim}(E_i)$.

$$\text{Mat}_{B_i}(u|_{E_i}) = J_{q_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(K).$$

Théorème 31: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $X_u = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)^{m_i}$
 soit scindé dans $\mathbb{C}[T \times T]$. Alors $\mathbb{R}_u$ de $\mathbb{C}$ sont les racines de X_u dans $\mathbb{C}$.
 $\text{Pol}_B(u) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \mu_1 & \dots & \mu_p \end{smallmatrix} \right)$ ou $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$, $J_i = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_i & \dots & \lambda_i \\ \mu_i & \dots & \mu_i \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{P}_p(\mathbb{C})$
 où les $\lambda_i \in \{0, 1\}$

III) Applications

1) Formes quadratiques

Théorème 32: (Réduction de Gauss). Soit q une forme quadratique
 sur E de rang $r \in \mathbb{N}$. $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$ et
 $(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ telle que $\forall x \in E : q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i (x_i)^2$.

2) Calcul différentiel

Ici, $E = \mathbb{R}^n$,

Proposition 33: Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in E$.

Alors $D_x f \in E^*$.

Plus précisément, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $D_x f(h) = \langle \text{grad}_x f, h \rangle$
 où $\text{grad}_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$

Exemple 34: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
 $x \mapsto \|x\|_2$
 si $x \neq 0$, $\text{grad}_x f = \frac{x}{\|x\|_2}$.

3) Probabilités

Proposition 35: Soit X une variable aléatoire sur E
 est déterminée par les lois marginales de X et
 $\forall$ Variable u ,