

# Leçon N° 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien

Dans toute cette leçon, on considère  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## I) Endomorphismes normaux :

### 1) Autoadjoint

Proposition - définition 1 :  $\forall u \in \mathcal{L}(E), \exists v \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\forall (x, y) \in E^2, \langle ux, y \rangle = \langle x, vy \rangle$ .

On note  $u^* := v$  et on le nomme adjoint de  $u$ .

Proposition 2 : Soit  $B$  une BON de  $E$ ,  $\forall u \in \mathcal{L}(E), \text{Mat}_B(u^*) = {}^t \text{Mat}_B(u)$ .

Proposition 3 :  $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$1) \text{Id}_E^* = \text{Id}_E$$

$$2) (u^*)^* = u$$

$$3) (u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$$

$$4) (uv)^* = v^* \circ u^*$$

Corollaire 4 :  $\forall u \in \mathcal{L}(E), u$  est inversible  $\Leftrightarrow u^*$  est inversible

$$\text{et } (u^*)^{-1} = (u^{-1})^*.$$

Proposition 5 :  $u \in \mathcal{L}(E), \text{Ker}(u) = \text{Im}(u^*)^\perp$

$$\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^*)^\perp.$$

Corollaire 6 :  $\forall u \in \mathcal{L}(E), \text{rg}(u) = \text{rg}(u^*)$

Proposition 7 : Soit  $F$  un s.e. de  $E$ ,

si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

### 2) Endomorphismes normaux et leur réduction

Définition 8 :  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit normal lorsque  $u \circ u^* = u^* \circ u$ .

## Leclerc euclidien

Proposition 9 :  $u \in \mathcal{L}(E)$  est normal  $\Leftrightarrow \forall u \in E, \|u \cdot u\| = \|u \cdot \|u\|\|$ .

Théorème 10 : Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  est normal et  $F$  un s.e. de  $E$ .

Alors, si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

Lemme 11 :  $\forall u \in \mathcal{L}(E)$  normal,  $\exists$  des sous-espaces orthogonaux de  $E$   $F_1, \dots, F_r$  de dimension égale à 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par  $u$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ .

Lemme 12 : Soit  $P$  un espace euclidien de dimension 2. Soit  $u$  une valeur propre réelle de  $u$  donc diagonalisable, soit  $u \cdot u^* = u$  par de valeurs propres réelles et deux pour toutes bornes orthogonale  $B$  de  $P$ :  $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  où  $a \neq 0$ .

Théorème 13 : (Réduction de endomorphismes normaux) Soit  $u$  normal,  $\exists B$  une BON de  $E$  telle que :  $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} D^1 R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_r \end{pmatrix}$  où  $D^i$  est une matrice diagonale de taille  $p_i$  et  $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$  où  $b_i \neq 0$ .

### 3) Endomorphismes auto-adjoints

Définition 14 : Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on dit que  $u$  est autoadjoint lorsque  $u = u^*$ .

Exemple 15 : Un projecteur orthogonal est autoadjoint.

Une symétrie orthogonale est autoadjointe.

Proposition 16 :  $\forall u$  autoadjoint,  $\forall B$  BON de  $E$ ,  $\text{Mat}_B(u) \in S_n(E)$ .

Corollaire 17 : Un endomorphisme autoadjoint est normal.

Théorème 18 : (Spectral theorem endomorphisme) Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$

autoadjoint.  $\Phi$  B BON d.e. telle que  $\text{Mat}_B(u)$  est diagonale.

Corollaire 19: (Spectral theorem matriciel)  $\forall A \in \text{Sym}(M)$ ,  $\exists P \in \text{O}(M)$ ,  $\text{CAP}$  est diagonale.

Application 20: L'application  $p: \text{O}(M) \times \text{Sym}(M) \rightarrow \text{GL}(M)$  (composition)

$(O, S) \mapsto OS$  est un homéomorphisme.

Application 21: Exponentielle est un homéomorphisme de  $\text{Sym}(M) \times \text{Sym}(M) \rightarrow \text{GL}(M)$ .

## II) Endomorphismes orthogonaux

### 1) Groupe orthogonal

Définition 22: Une isométrie linéaire de  $E$  est un endomorphisme de  $E$  qui conserve le produit scalaire. On note  $\text{O}(E)$  l'ensemble des isométries linéaires de  $E$ .

Exemple 23: Les seules homothéties de  $\text{O}(E)$  sont  $-\text{Id}_E$  et  $\text{Id}_E$ .

Définition 24: On note  $\text{SO}(E) = \{u \in \text{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$ .

Proposition 25:  $\text{O}(E) \setminus \{0\}$  est un groupe et  $\text{SO}(E)$  est un sous-groupe.

Proposition 26: Soit  $u \in \text{L}(E)$ ,  $u \in \text{O}(E)$  si  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .

Proposition 27:  $u \in \text{L}(E)$  est une isométrie si et seulement si  $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ , la isométrie linéaire sous forme normale.

Proposition 28: Soit  $u \in \text{L}(E)$ ,  $u \in \text{O}(E)$  si

i)  $\forall (e_i)_{i \in I} \in \text{BON}$ ,  $(u(e_i))_{i \in I} \in \text{BON}$   
 ou ii)  $\forall B \in \text{BON}$ ,  $\text{Mat}_B(u)^T \text{Mat}_B(u) = \text{Id}_n$ .

Définition 29: Soit  $u$  une symétrie orthogonale. On note  $E^+ = \ker(u - \text{Id}_E)$  et  $E^- = \ker(u + \text{Id}_E)$  qui vérifie  $E = E^+ \oplus E^-$ .

Si  $\dim(E^+) = 1$ , on dit que  $u$  est une réflexion.

Si  $\dim(E^+) = 2$ , on dit que  $u$  est une rotation.

Théorème 30:  $\text{O}(E)$  est engendré par les réflexions, plus précisément, si  $u$  est dans  $\text{O}(E)$ ,  $u$  est produit d'un plus ou moins

1) Si  $n \geq 3$ ,  $\text{SO}(E)$  est engendré par les rotations, plus précisément, si  $u$  est dans  $\text{SO}(E)$ ,  $u$  est produit d'un plus ou moins

Lemme 31: Soit  $n \geq 3$ ,  $\tau_1, u, \tau_2$  deux réflexions,  $\tau_1 \tau_2, \tau_1 \tau_2 \tau_1, \tau_1 \tau_2 \tau_1 \tau_2$  sont engendrés par  $\tau_1, \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$ .

Proposition 32:  $\forall u \in \text{O}(E)$ ,  $\det(u) \in \{+1, -1\}$ .

Corollaire 33:  $\text{O}(E)$  possède deux composantes connexes qui sont:  $\begin{cases} \text{SO}(E) \\ \text{O}(E) \setminus \text{SO}(E) \end{cases}$

Théorème 34: Soit  $u \in \text{O}(E)$ ,  $\exists B \in \text{BON}$  de  $E$  telle que

$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$  où  $\begin{matrix} p & q \end{matrix}$  sont des entiers naturels

### 2) Étude en petite dimension

Proposition 35: Soit  $u \in \text{O}_2(\mathbb{R})$  et  $A$  la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

- Soit  $u \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$   $u = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  tel que:

$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta$ .

- soit  $u \in \mathbb{R}^m$  ( $|u| = 1$ ) et  $\exists! \theta \in [0, 2\pi[$  tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Théorème 36: Le groupe  $(SO_2(\mathbb{R}), \circ)$  est simple,

## III) Application en statistique.

(Fisher-Cochran).

Théorème 37: On considère un vecteur gaussien  $X \sim \mathcal{N}(m, Id)$  et une décomposition  $E_1 \oplus \dots \oplus E_r = \mathbb{R}^d$  en sous-espace orthogonaux de dimension respectives  $d_1, \dots, d_r$ .

Les projections orthogonales  $\Pi \in E_1, \dots, \Pi \in E_r$  forment des vecteurs gaussiens indépendants.

De plus,  $\forall i \in [1, r], \|\Pi E_i X\|_2^2 \sim \chi^2(d_i, \|\Pi E_i m\|_2^2)$  (avec  $\chi^2$ ).

Corollaire 38: Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  des variables aléatoires dans  $[1, m]$ .

On note  $\forall i \in [1, m], N_i(n) = \sum_{k=1}^n 1_{X_k = i}$  et  $\Pi_i = \mathbb{P}(X_1 = i)$ .

$$A_n D_n(\Pi) = \sum_{i=1}^m \frac{(N_i(n) - n\Pi_i)^2}{n\Pi_i} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \chi^2(m-n)$$