

Leçon N° 157

Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Dans toutes ces leçons, $M, N \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un M -es de dimension finie $n \geq 1$.

I) Présentations

1) Définitions

Définition 1: 1) $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique lorsque ${}^tA = A$.

On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques.

2) $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

3) $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne lorsque $A^* = {}^t\bar{A} = A$. On note H_n l'ensemble des matrices hermitiennes.

Proposition 2: $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$ -es de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$ respectivement.

Corollaire 3: $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$

Proposition 4: M_n est un $\mathbb{R}$ -es de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension n^2 et $M_n = S_n(\mathbb{R}) \oplus i A_n(\mathbb{R})$

2) Matrices positives

Définition 5: Une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. définie positive) lorsque $\forall x \in \mathbb{R}^n, {}^tAx \cdot x \geq 0$ (resp. > 0 si $x \neq 0$). On note $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ les ensembles

respectifs: Une matrice $A \in M_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $M_n^{++}(\mathbb{R})$) vérifie $\exists P \in GL_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\exists P \in GL_n^{++}(\mathbb{R})$) telle que $A = P {}^tPP$.

3) Actions des groupes linéaires sur $S_n(\mathbb{K})$

Définition 7: On appelle action par conjugaison l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur

$S_n(\mathbb{K})$ définie par $(P, A) \mapsto PAP^{-1}$ pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A \in S_n(\mathbb{K})$.

Proposition 8: Deux matrices symétriques sont semblables, si et seulement si elles sont dans la même orbite pour l'action de conjugaison.

Définition 9: On appelle action par congruence l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur

$S_n(\mathbb{K})$ définie par $(P, A) \mapsto PAP^*$ pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A \in S_n(\mathbb{K})$.

Proposition 10: Deux matrices symétriques sont congruentes, si et seulement si elles sont dans la même orbite pour l'action par congruence.

Proposition 11: Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une forme quadratique (resp. hermitienne) et une application $q: E \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$) telle que $q(x) = A x$ pour tout $x \in E$. On appelle matrice associée à A la matrice $B \in S_n(\mathbb{R})$ (resp. H_n) définie par $B(x, y) = q(x) \cdot q(y)$ pour tout $x, y \in E$. On appelle matrice représentative de A la matrice B ainsi définie.

II) Formes quadratiques et hermitiennes

1) Définitions

Définition 11: Soit $M \in \mathbb{R}$ (resp. $M \in \mathbb{C}$), une forme quadratique (resp. hermitienne) est une application $q: E \rightarrow M$ telle que $q(x) = M x$ pour tout $x \in E$.

Proposition 12: Soit B une base de E . On appelle matrice de la forme quadratique (resp. hermitienne) associée à B la matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ (resp. H_n) définie par $A_{ij} = q(b_i, b_j)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Proposition 13: (formules de polarisation) Soit q une forme quadratique (resp. hermitienne), sa forme bilinéaire symétrique (resp. sesquilineaire hermitienne) est donnée par les formules suivantes: $B(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x-y))$ (resp. $B(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x-y))$).

Exemple 14: Soit $q(x, y) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ est une forme quadratique. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Réduction de Gauss et signature.

Proposition 15: Deux matrices $A, A' \in \text{Sn}(n, \mathbb{R})$ (resp M_n) représentent la même forme q. sans deux bases B et B' si et seulement si elles sont congruentes.

Proposition 16: Soit $A \in \text{Sn}(n, \mathbb{R})$ (resp M_n), il existe $P \in \text{Gln}(n, \mathbb{R})$ telle que $P^t A P$ soit de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{N}$.

Exemple 17: Dans $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 2yz + yz$ se réduit sous la forme $q(x, y, z) = (x + \frac{z}{2})^2 - (\sqrt{2}y - \frac{z}{2\sqrt{2}})^2 - (\frac{z}{2\sqrt{2}})^2$.

Théorème 18: (critère de Sylvester) Les entiers s et t du théorème 16 sont entièrement déterminés par $A = (a_{ij})$ s'appelle la signature de A et $r = 1 + t$ le rang de A .

Proposition 19: A et A' ont même signature si et seulement si elles sont congruentes.

Proposition 20: $A \in \text{Sn}^+(n, \mathbb{R})$ (resp M_n^+) n'a signature et de la forme $(s, 0)$ $A \in \text{Sn}^{++}(n, \mathbb{R})$ (resp M_n^{++}) n'a signature et $(n, 0)$.

III) Théorème spectral et compléments.

1) Endomorphismes autoadjoints.

Proposition 21: Soit E un espace euclidien (resp hermitien).

Alors $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\exists ! f^*$ tel que $\forall x, y \in E$,

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle. \quad f^* \text{ s'appelle l'adjoint de } f.$$

Définition 22: f est dit autoadjoint lorsque $f^* = f$.

Proposition 23: $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si la matrice dans une base orthonormée de E est symétrique (resp hermitienne) si la matrice dans toute base orthonormée de E est dans $\text{Sn}(n, \mathbb{R})$ (ou M_n).

2) Théorème spectral.

Théorème 24: Soit $A \in \text{Sn}(n, \mathbb{R})$, $\exists P \in \text{O}_n(n, \mathbb{R})$ tel $A = P \Lambda P^t$ où Λ est diagonale.

Théorème 25: Soit $A \in M_n$, $\exists P \in \text{O}_n(n, \mathbb{C})$ et $\Lambda \in \text{D}_n(n, \mathbb{R})$ tels que $P^{-1} A P = P^t A P = \Lambda$.

Corollaire 26: (orthogonalisation simultanée) Soient $A, B \in \text{Sn}(n, \mathbb{R})$ (resp $M_n(\mathbb{C})$) tels que A soit symétrique positif. Alors $\exists P$ inversible, diagonale réelle telle que $P^t A P = I_n$ et $P^t B P = D$.

(resp $P^* A P = I_n$ et $P^* B P = D$).

Contre exemple 27: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \text{Sn}(2, \mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

3) Homomorphismes vectoriels.

Théorème 28: L'application exp: $\text{Sn}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sn}^+(n, \mathbb{R})$ est un isomorphisme.

Théorème 29: Les applications $p_1: \text{O}_n(n, \mathbb{R}) \times \text{Sn}^{++}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Gln}(n, \mathbb{R})$ (décomposition polaire) $(O, S) \mapsto OS$ et $p_2: \text{U}_n(n, \mathbb{C}) \times \text{H}_n^{++}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Gln}(n, \mathbb{C})$ sont des isomorphismes.

$$(U, S) \mapsto US$$

Corollaire 30: Tout sous groupe compact de $\text{Gln}(n, \mathbb{C})$ contenant $\text{O}_n(n, \mathbb{R})$ est $\text{O}_n(n, \mathbb{R})$.

4) Matrices et déterminants de Gram.

Définition 31: Soit E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_n$ n éléments de E . On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice noté $G(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 32: Toute matrice de Gram est hermitienne positive. Plus précisément, toute matrice hermitienne positive est une matrice de Gram. De plus, la matrice de Gram de n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est définie par $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et l'inverse.

Théorème 33: Soit E un préhilbertien, V un sous-espace de E muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$, alors la distance d de x à V vérifie $d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$.

5) Factorisations (et Cholesky)

Lemme 34: (LU) Soit $A \in M(K)$ avec toutes les sous-matrices d'ordre $\leq$ diagonales sont inversibles (en particulier si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$) $\exists!$ (L, U) avec $L \in T_n^{-1}(K)$, $U \in T_n^+(K)$ et $LU = A$ $\forall i \in \{1, n\}$ tel que $A = LU$.

Théorème 35: (Cholesky) Soit $A \in S_n^{++}(K)$. $\exists!$ $B \in T_n^+(K)$ tel que $A \in \mathbb{P}[1, n]$, $B \bar{B}^T \circ A = BB^*$.

Remarque 36: La factorisation cholesky nécessite moins $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + n$ opérations de qu'à l'inverse que le pivot de Gram entier $\frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2}$ opérations pour résoudre $Ax = b$ avec $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

IV) Variables gaussiennes

On se place sous l'unique probabilité $(S, \mathcal{F}, P)$.

Définition 37: Une variable aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d) : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est un vecteur gaussien lorsque $\forall \alpha \in \mathbb{R}^d$, $\langle \alpha, X \rangle$ est une variable aléatoire gaussienne.

Proposition 38: Un vecteur gaussien $X = (X_1, \dots, X_d)$ est caractérisé par son espérance $E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_d])$ et sa matrice covariance $(\text{cov}(X_i, X_j))_{i, j \in \{1, \dots, d\}} \in S_d(\mathbb{R})$.

Théorème 39: Si la matrice de covariance de X est diagonale, les variables $X_1, \dots, X_d$ sont mutuellement indépendantes.