

Leçon N° 156

Endomorphismes trigonalisables, Endomorphismes nilpotents

Soit U un corps commutatif et E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, notons :

$\chi_u := \det (X I_E - u)$ son polynôme caractéristique et p_u son polynôme minimal.

I) Endomorphismes trigonalisables

1) Caractérisations

Définition 1: On dit que u est trigonalisable lorsqu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Théorème 2: Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est trigonalisable sur K
- (ii) χ_u est scindé sur K
- (iii) p_u est scindé sur K

Exemple 3: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Remarque 4: Si $U = \mathbb{C}$, u est nécessairement trigonalisable, ou plus généralement si U est algébriquement clos.

Proposition 5: Si F est un $\mathbb{C}$ -espace stable par u trigonalisable, alors $u|_F$ est encore trigonalisable.

Application 6: (Cayley-Hamilton). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$. En particulier $p_u \mid \chi_u$.

2) Convergence

Lemme 7: Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ avec $uov = vov$.

Alors uv est stable par v et tout $\mathbb{C}$ -espace propre de u est stable par v .

Endomorphismes nilpotents

Théorème 8: Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux, alors il existe une base commune de E de trigonalisation.

Corollaire 9: Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uov = vov$ et u, v trigonalisables, alors $u+v$ est trigonalisable.

Application 10: Soit G un p -sous-groupe d'éléments de $GL_n(\mathbb{F}_p)$, alors G est conjugué à un sous-groupe de matrices triangulaires.

3) Propriétés topologiques

$\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 11: On note $D_n(U)$ l'ensemble des matrices diagonales de U et $T_n(U)$ l'ensemble des matrices triangulaires sur U .

Proposition 12: $T_n(U)$ est fermé dans $M_n(U)$ et $\overline{D_n(U)} = T_n(U)$.

Corollaire 13: Si $U = \mathbb{C}$, $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

4) Première application à la trigonalisation: convergence de la méthode itérative.

Proposition 14: Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle (subordonnée) définie sur $M_n(\mathbb{C})$. On a $\rho(A) \leq \|A\|$.

Réciproquement, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, $\exists$ une norme subordonnée $\|\cdot\|_\varepsilon$ telle que $\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Lemme 15: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, il y a équivalence entre :

- (i) $A^i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$
- (ii) $\forall x \in \mathbb{C}^n, A^i x \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$

(ii) $\rho(A) < 1$

(iv) $\exists$ une norme matricielle (subordonnée) telle que $\|A\| < 1$.

Théorème 16: Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, posant (I, N) $\in GL_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$

tels que $A = I + N$. Pour résoudre $Ax = b$, on considère la

séquence itérative suivante: $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = Nx_k + b \end{cases}$

Cette méthode converge vers la solution si le rayon spectral de $I - N$ vérifie $\rho(I - N) < 1$.

II) Endomorphismes nilpotents.

A) Caractérisation

Définition 17: On dit que u est nilpotent lorsque il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u^m = 0$. Inf $\{m \in \mathbb{N}, u^m = 0\}$ est appelé l'indice de nilpotence de u .

Exemple 18: Si $E = \mathbb{K}_n[X]$, la dérivation est nilpotente d'indice n .

Théorème 19: u est nilpotent si

$$\chi_u = X^n \text{ sur } M_n$$

$$\text{Sp}(u) = \{0\} \text{ est un sous-espace invariant}$$

$$P_u = X^m \text{ où } m \text{ est l'indice de nilpotence de } u.$$

Proposition 20: Si u est la dérivation nulle,

$$u \text{ est nilpotent sur } \forall q \in \mathbb{R}[X], T_n(u^q) = 0.$$

Corollaire 21: Si F est stable par u nilpotent d'indice m ,

alors $u|_F$ est encore nilpotent d'indice au plus m .

1) Propriétés générales et caractérisation

Proposition 22: Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents qui commutent, alors $u+v$ et uv sont aussi nilpotents.

Proposition 23: Soit u nilpotent d'indice m et $x \in E$ tel que $u^{m-1}(x) \neq 0$, alors la famille $B_u, x = \{x, u(x), \dots, u^{m-1}(x)\}$ est libre et $F := \text{Vect}(B_u, x)$ est stable par u .

Proposition 24: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $a, d_A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $a(n) = d_A(n)$. Alors A est nilpotent si et seulement si $a(n) = 0$.

Définition 25: Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $P_A := \{P \in \mathbb{K}[X], P(A) = 0\}$.

Proposition 26: On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On a que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotent si et seulement si la matrice $\exp(A)$ est dans E_n .

B) Stabilité et nilpotence

Définition 27: On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$, on

définit $\psi_u \in \mathcal{L}(E^*)$ par $\forall \varphi \in E^*, \psi_u(\varphi) = \varphi \circ u$.

Proposition 28: Si u est nilpotent d'indice m , ψ_u est nilpotent d'indice m .

Proposition 29: Soit u nilpotent d'indice m , alors $\exists \varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = \text{Vect}\{x, u(x), \dots, u^{m-1}(x)\}$ et G l'orthogonal de $F = \text{Vect}\{\varphi, \psi_u(\varphi), \dots, \psi_u^{m-1}(\varphi)\}$ dans E n'est stable par u et que on ait $E = F \oplus G$.

III) Réduction d'endomorphismes

1) Décomposition de Dunford.

Lemme 30: (noyaux) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $P = P_1 \dots P_r \in \mathbb{C}[X]$ tels que les P_i sont 2-à-2 premiers entre eux. Alors on a $\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(u))$ et $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, la projection $\Pi_i: \ker(P(u)) \rightarrow \ker(P_i(u))$ est un polynôme en u .

Définition 31: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que X_u soit scindé en $\mathbb{C}$. So on a $X_u(X) = \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, pour $i \in \{1, \dots, q\}$, on appelle sous-espace caractéristique de u associé à λ_i le sous $N_i = \ker((u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i})$.

Théorème 32: (Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que X_u est scindé en $\mathbb{C}$. Alors $\exists!$ $(d, n) \in \mathbb{Z}(E)$ tel que :
 1) d est l'endomorphisme en $\mathbb{C}$
 2) n est nilpotente
 3) $d \circ n = n \circ d$
 4) $d + n = u$.

De plus, d et n sont des polynômes en u .

Application 33: Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si X_u est scindé, alors u est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si $\text{Exp}(u)$ l'est.

2) Réduction de Jordan.

Définition 34: Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Le bloc de Jordan de taille q associé à λ est $J(\lambda, q) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_q(\mathbb{K})$.

Théorème 35: (Jordan, cas nilpotent) Soit u nilpotent d'indice m , alors $\exists$ base $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ de E telle que $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, les sous $E_i = \text{Vect}(B_i)$ sont stables.

par u et la matrice de $u|_{E_i}$ dans B_i est $J(0, q_i)$ avec $q_i = \dim(E_i)$.

Application 36: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, alors P est nilpotent si et seulement si P est divisible par X^m .

Théorème 37: (Jordan) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que X_u est scindé. Soit $\mathbb{K}$ de forme $X_u(X) = \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont 2-à-2 distincts et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, alors $\exists$ une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\alpha_q} \end{pmatrix} \text{ où } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$$

et $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, $\alpha_j \in \{0, 1\}$.

Application 38: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, alors P est divisible par X^m .