

Leçon N° 155

Exponentielle de matrices - Applications

Dans toute cette leçon, M désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$.

I) Définitions et propriétés générales

1) Présentations

Lemme 1: La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur $M_n(M)$.

Définition 2: Pour $A \in M_n(M)$, on définit l'exponentielle matricielle de A par $\exp(A) = e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Proposition 3: $\forall \| \cdot \|$ norme subordonnée et $A \in M_n(M)$, $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Exemples 4: Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

En particulier $e^0 = I_n$.

Proposition 5: L'application $\exp: M_n(M) \rightarrow M_n(M)$ est de classe e^{∞} sur $M_n(M)$.

Proposition 6: $\forall A \in M_n(M)$, $\exp(A) \in M_n(M)$.

Proposition 7: $\forall A \in M_n(M)$ et $P \in GL_n(M)$,
 $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$.

Proposition 8: Soient A et $B \in M_n(M)$ tels que A et B commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Contre-exemple 9: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $e^{A+B} = \begin{pmatrix} 1 & e'' \\ 0 & e \end{pmatrix} \neq e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$

Proposition 10: $\forall A \in M_n(M)$, $\det(\exp(A)) = e^{\text{Tr}(A)}$.

Corollaire 11: $\forall A \in M_n(M)$, $e^A \in GL_n(M)$.

et l'inverse de e^A est e^{-A} .

Proposition 12: $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\overline{\exp(A)} = \exp(\bar{A})$.

Proposition 13: $\forall A \in M_n(M)$, ${}^c \exp(A) = \exp({}^c A)$.

Corollaire 14: Soit $A \in M_n(M)$,

1) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors $e^A \in M_n(\mathbb{R})$.

2) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors $e^A \in O_n(M)$.

Proposition 15: Soit $A \in M_n(M)$. L'application $\varphi_A: t \mapsto e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_A'(t) = A e^{tA}$.

Proposition 16: Soient $A, B \in M_n(M)$, A et B commutent. Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$.

2) Décomposition de Dunford

Lemme 17: Soit E un M -ev de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un polynôme annulateur de f . Ennotant $N_1, \dots, N_s$ sa décomposition en produit de facteurs premiers, $N_i = \prod_{j=1}^{d_i} (T_i, d_i, \beta_j)$, on a que $E = \bigoplus_{i=1}^s N_i$, les projecteurs N_i sont parallèles à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ sont des polynômes en f .

Théorème 18: (Dunford) Soit $A \in M_n(M)$ tel que χ_A soit scindé sur M .

3) $(D, N) \in M_n(M)^2$ tel que 1) D est diagonalisable sur M

2) N est nilpotente

3) $D+N=A$

4) $DN=ND$

De plus, D et N sont des polynômes en A .

Proposition 19: Si A est triangulable et si $A = D+N$ est sa décomposition de Dunford, alors $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$

est la décomposition à l'unique de e^A .

Application 20: A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable.

3) Logarithme matriciel.

Notation 21: Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ le rayon spectral de A .

Lemme 22: Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière à coefficients réels ou complexes, de rayon de convergence $R > 0$. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est tel que $\rho(A) < R$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n A^n$ converge normalement et si $\rho(A) > R$, elle diverge.

Définition 23: Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\rho(A) < 1$, on définit le logarithme de $I_n + A$ par $\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k$.

Proposition 24: Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\rho(A) < 1$, $\ln(I_n + A) \in [A]$.

Proposition 25: Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\rho(A) < 1$, $\exp(\ln(I_n + A)) = I_n + A$.

Notations 26: On note $N_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $U_n(\mathbb{C})$ l'ensemble de matrices unitaires.

Proposition 27: Soit $A \in N_n(\mathbb{C})$, alors $\exp(A) \in U_n(\mathbb{C})$.

4) Surjectivité et injectivité de l'exponentielle.

Lemme 28: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$,

$$C[A]^{\times} = C[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$$

Théorème 29: $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Application 30: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Application 31: $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Proposition 32: L'application $\exp: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Proposition 33: L'application $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ est injective, où $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices diagonalisables.

II) Application aux équations différentielles.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, t_0 un réel et n un entier n , $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ et $b: I \rightarrow \mathbb{C}$ deux applications continues.

On considère l'équation différentielle: $\forall t \in I, x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$.

Définition 34: Pour $A \in \mathcal{L}(E)$, $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in GL(E)$.

Proposition 35: On suppose que A est continue et que b est

continue. $\forall (t_0, x_0) \in I \times E$, l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est donné par $\forall t \in I$,

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right) x_0$$

Application 36: $\forall A \in \mathcal{L}(E)$ et $H \in \mathcal{L}(E)$,

$$\frac{d}{dt} \exp(H) = \int_0^1 \exp((1-s)A) H \exp(sA) ds$$

Exemple 37: Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

admet une unique solution $t \mapsto \exp(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $= e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proposition 38 (Existence) : Soient $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue,
 $b_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{L}$ l'unique solution du problème
de Cauchy $\begin{cases} y' = Ay + B \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ est $t \mapsto e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds$

III) Applications à la structure des groupes linéaires.

Proposition 39 : L'application $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\forall X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$D_X(\exp(H)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=0}^{i-1} X^j H X^{i-1-j} \right)$$

En particulier, $D_0 \exp = \text{Id}$

Application 40 : $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits -

Proposition 41 : L'application $\exp: \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}^{++}_n(\mathbb{R})$ est un

homéomorphisme

Proposition 42 : L'application $\exp: \text{ih}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Sym}^{++}_n(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

Proposition 43 : L'application $\exp: \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Un}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme et bijection réciproque le logarithme matriciel.

Lemme 44 : $\text{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 45 (Décomposition polaire) : $\forall M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$,

$\exists ! (O, S) \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \text{Sym}^{++}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$. De plus

la bijection $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \text{Sym}^{++}_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Application 46 : $\text{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

dev
venir