

Leçon N° 154: Exemples de décompositions de matrices Applications

$M \in \mathbb{R}^{m \times n}$

I) Résolution de systèmes linéaires par pivots de Gauss

On cherche à résoudre $Ax = b$ si on connait $x \in \mathbb{R}^n$ avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}(K)$, $b \in \mathbb{R}^m$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$)

1) matrices triangulaires

Proposition 1: Soit $T \in \mathbb{R}^{n \times n}(K)$ triangulaire supérieure. Le système $Tx = b$ peut être résolu en $O(n^2)$ opérations élémentaires.

Proposition 2: Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}(K)$, $\exists P \in \text{GL}_m(K)$ tel que $T = PA$ est triangulaire supérieure.

Application 3: Avec les notations précédentes, $Ax = b$ si $Tx = Pb$. De plus, on peut calculer PA et Pb en $O(n^3)$ opérations, la méthode implique un coût en $O(n^3)$ pour compléter $O(n^3)$.

2) Opérations élémentaires

Définition 4: On définit 3 types de matrices:

1) transpositions: $(\neq I)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$; $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ne correspondent à

l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

2) dilatation: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ qui correspondent à

l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

3) transposition: $(\neq I)$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ qui correspondent à

l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.

Précorollaire 5: $\text{GL}_n(K)$ est engendré par les matrices de transposition et de dilatation.

3) matrices échelonnées réduites

Définition 6: 1) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}(K)$ est échelonnée si le nombre de zéros précédant le premier coefficient non nul croît strictement au long de chaque ligne.

2) Ces premiers coefficients non nuls sont appelés pivots.

3) Si de plus, chaque pivot vaut 1, et les coefficients au dessus de

pivots sont nuls, alors A est dite échelonnée réduite.

Exemple 7: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée et échelonnée réduite.

Précorollaire 8: $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}(K)$, $\exists (P, E)$ tel que $\begin{cases} A = PE \\ P \in \text{GL}_m(K) \text{ est } \\ E \in \mathbb{R}^{n \times n}(K) \text{ est échelonnée réduite.} \end{cases}$

II) Méthodes de factorisation

1) Factorisation LU

Précorollaire 9: Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}(K)$ dont tous les sous-matrices d'ordre k des pivots sont inversibles.

$\exists L \in \mathbb{R}^{n \times n}(K)$, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}(K)$ et $L^{-1} = A^{-1}U^{-1}$ tel que $A = LU$.

Remarque 10: C'est en particulier le cas si $A \in \text{GL}_n(K)$.

Remarque 11: Adresser $Ax = b$ revient à résoudre $Ly = b$ puis $Ux = y$.

Remarque 12: Il existe un algorithme de complexité $O(n^3)$ pour trouver L et U .

2) Factorisation de Cholesky

Précorollaire 13: Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}(K)$, $\exists B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $B_{ii} > 0$ et $A = BB^T$.

Remarque 14: Il existe un algorithme de complexité $O(n^3)$ pour trouver B .

3) Factorisation QR

Théorème 15: Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists (Q, R) \in \Gamma_n(\mathbb{R})^2$ tels que $A = QR$, $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $R \in T_n^+(\mathbb{R})$ et $R_i \geq 0 \forall i \in \{1, n\}$.

Application 16: $Ax = b$ revient à $Rx = c$ b.

III) Méthode itérative.

Définition 17: Soit $\| \cdot \|$ une norme subordonnée dérivée sur $\Gamma_n(\mathbb{R})$.
 $Q_n = \forall A \in M_n(\mathbb{C}), \|Q(A)\| \leq \|A\|$.
 Réciproquement, $\forall A \in \Gamma_n(\mathbb{C})$ et $Q > 0$, $\exists$ une norme subordonnée $\| \cdot \|_A$ telle que $\|A\|_A \leq \|P(A)\| + \epsilon$.

Lemme 18: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $LASS \in$.

- 1) $A' \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$
 - 2) $\forall x \in \mathbb{R}^n, A^t x \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$
 - 3) $\rho(A) < 1$
 - 4) $\exists$ une norme matricielle subordonnée telle que $\|A\| < 1$.
- Théorème 19: Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $(\Gamma, N) \in O_n(\mathbb{R}) \times \Gamma_n(\mathbb{R})$ tels que $A = \Gamma^{-1}N$.
- On considère la méthode d'itération suivante: $\begin{cases} x_{k+1} = Nx_k + b \\ \Gamma x_{k+1} = N \Gamma x_k + b \end{cases}$
- La méthode d'itération converge vers la solution $m \in \mathbb{R}$ unique spectrale de $\Gamma^{-1}N$ vérifiant $\rho(\Gamma^{-1}N) < 1$.

IV) Décomposition de Dunford.

Lemme 20: (des noyaux) Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie n . Soit $\lambda \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})$ et $P = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{p_i}$ tel que $P \wedge P_j = 1 \forall i \neq j$.

Posez 1) $\ker(P(A)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(A))$
 2) $\forall i \in \{1, r\}$, la projection $\Pi_i: \ker(P(A)) \rightarrow \ker(P_i(A))$ est un polynôme en A .

Théorème 21: (Dunford), soit $f \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})$ tel que X_f est séparable sur $\mathbb{K}$.
 $\exists (d, n) \in \mathbb{Z}(\mathbb{C})^2$ tel que 1) d est irréductible sur $\mathbb{K}$
 2) n est indépendante
 3) $1 \leq n \leq d$
 4) $d \mid n = f$.

De plus, d et n sont des polynômes en f .

Exemple 22: Soit $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de $A \in \Gamma_n(\mathbb{C})$, $d \mid n$, d est la partie diagonale de A et $N = e^P(e^N - I_n)$.

V) Réduction de Jordan.

1) Cas des endomorphismes nilpotents.
Lemme 23: Soit u nilpotent d'ordre $p \geq 1$, $\forall v \in E$ tel que $u^{p-1}(v) \neq 0$, $B(u, v) = (u^i(v))_{0 \leq i \leq p-1}$ est b.c.b. et $F = \text{Vect}(B(u, v))$ est stable par u .

Lemme 24: Soit u nilpotent d'ordre $p \geq 1$, $\exists \varphi \in E^*$, $u \in E^*$ tels que $F = \text{Vect}(B(u, \varphi))$ et M^0 , où $u = \text{Vect}(B(u, \varphi))$ sont stables par u avec $E = F \oplus M^0$.

Définition 25: Pour $r \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle cellule de Jordan de taille r associée à λ la matrice $J_{r, \lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in \Gamma_r(\mathbb{K})$.

Théorème 26: (Jordan (cas nilpotent)) Soit u nilpotent d'ordre $p \geq 1$, $\exists B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ base de E telle que $\forall i \in \{1, r\}$, $B_i = \text{Vect}(B_i)$ de dim $r_i \geq 1$ stable par u et $\Gamma_{r_i, \lambda_i}(B_i) = J_{r_i, 0}$.

VI) Cas général.

Définition 27: Pour $r \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle bloc de Jordan de taille r associée à λ une matrice $J_{r, \lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $1 \leq r \leq p$ et $\sum r_i = n$.

Théorème 28: (Jordan) Soit X_u séparable, $\exists$ base de E sous laquelle

La matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} J_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{n_k} \end{pmatrix}$ où les J_i sont tous $\neq$ et partent du spectre de u .
Celle forme est unique à translation des valeurs propres près.

VII) Décomposition polaire.

Lemme 29: Soit $S \in \mathcal{S}u^{++}(\mathbb{R})$, alors $\exists!$ $\sqrt{S} \in \mathcal{S}u^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\sqrt{S}^2 = S$.
De plus $\sqrt{S} \in \mathcal{R}(S)$.

Théorème 30: 1) $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}u^{++}(\mathbb{R}) \simeq GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
2) $O_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \simeq GL_n(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

Remarque 31: Soit $n = 1$, u se réduit: $U \times \mathbb{R}^{++} \xrightarrow{(e^x, r)} U \times \mathbb{C}^*$.

Corollaire 32: $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \|A\|_{\mathbb{R}} = \sqrt{P(AA^T)}$.
Celle opération s'élève à $O_n(\mathbb{R})$ pour donner:

Corollaire 33: Tout sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$.

VIII) Réduction de Frobenius

1) Endomorphismes cyclotomes

Définition 34: Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On appelle espace cyclotome associé à α l'ensemble $\mathcal{U}(\alpha) = \{P(u) \mid (u), P \in \mathbb{C}[X]\}$.
Définition 35: Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle polynôme minimal de α relativement à $\mathbb{C}$ le polynôme unitaire de degré minimal $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.
On note p_α, n_α .

Proposition 36: Soit $\alpha \in \mathbb{C}, \mathcal{U}(\alpha)$ est un $\mathcal{S}u$ sur $\mathbb{C}$ de dimension $\deg(p_\alpha, n_\alpha)$ dans une base $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n_\alpha-1}(\alpha)$.

Proposition 37: $\exists x \in \mathbb{C}$ tel que $p_\alpha, n_\alpha = p_\alpha$.

Définition 38: u est cyclotome Comp. si $\exists x \in \mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} = \mathcal{U}(\alpha)$ (α).
Définition 39: $\mathcal{S}u = \mathcal{X}^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathcal{X}^i \in \mathbb{C}[X]$, la matrice compagnon de P est $C_P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 40: Avec les mêmes notations, $\mathcal{X}_{C_P} = P$.

Théorème 41: u est cyclotome si: $\mathcal{X}_u = p_\alpha$
soit $\deg(p_\alpha) = n_\alpha$
soit $\exists$ base de $\mathbb{C}$ tel que $\mathcal{M}_B(u) = C_P$.

2) Réduction de Frobenius

Théorème 42: $\exists F_1, \dots, F_r$ $\mathcal{S}u$ de $\mathbb{C}$ stables par u tels que:
1) $\mathbb{C} = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.

2) $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $u|_{F_i}$ est cyclotome.

3) $\forall i, u|_{F_i} = p_{\alpha_i}, p_i \mid P$: la cette suite ne dépend pas de u et pas des choix des F_i .

Définition 43: La suite $(p_1, \dots, p_r)$ est appelée suite de invariants de similitude de u .

Théorème 44: (Frobenius) Si $p_1, \dots, p_r$ sont les invariants de similitude de u , $\exists$ base de $\mathbb{C}$ telle que $\mathcal{M}_B(u) = \begin{pmatrix} C_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & C_{p_r} \end{pmatrix}$.

De plus, $p_1 = p_u$ et $p_1, \dots, p_r = n_u$.

Corollaire 45: u est semblable à $\alpha \in \mathbb{C}^*$ si et seulement si u est de même invariants de similitude.