Leçon N° 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$. On notera χ_u et π_u respectivement les polynômes caractéristiques et minimaux.

I) Généralités sur les endomorphismes diagonalisables

1) Espaces et éléments propres

Définition 1: On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u lorsqu'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$, i.e. lorsque $u - \lambda Id$ est non injectif. On notera $Sp_{\mathbb{K}}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

Exemple 2: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres : 1 et 2.

Définition 3: Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$, les vecteurs $x \neq 0$ tels que $u(x) = \lambda x$ sont appelés vecteurs propres associés à λ. L'ens ensemble (avec 0) formé $E_\lambda(u)$ appelé son espace propre associé à λ.

Proposition 4: $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$ ssi $\chi_u(\lambda) = 0$

Corollaire 5: Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, u possède une valeur propre.

Corollaire 6: $Sp_{\mathbb{K}}(u)$ est fini.

Proposition 7: On note m_λ la multiplicité de λ dans χ_u, alors $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$.

2) Diagonalisabilité.

Définition 8: u est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

Remarque 9: Soit $\mathcal{B}$ une base de E, on dit que u est diagonalisable ssi $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 10: Les homothéties sont diagonalisables.

II) Critères de diagonalisabilité :

1) Critères sur les espaces propres

Lemme 11: (Noyaux) Soient $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ 2-à-2 premiers entre eux. Alors $\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(P_i(u))$ où $P := \prod_{i=1}^{n} P_i$

Théorème 12: Il y a équivalence entre :
1) u est diagonalisable
2) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$
3) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $m_\lambda = \dim(E_\lambda(u))$.

Corollaire 13: Si u possède n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Exemple 14: $J_n := \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & (0) & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_{J_n} = X^{n-1}(X-n)$

et $E_0 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

et $E_n = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

J_n est diagonalisable.

2) Critère sur les polynômes d'endomorphismes

Théorème 15: Il y a équivalence entre :
1) u est diagonalisable
2) $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ annule u
3) $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples annulant u.
4) π_u est scindé à racines simples
5) $\pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$.

Corollaire 16: Si F est un sev de E stable par u, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

Application 17: On peut dénombrer le nombre d'endomorphismes de $\mathbb{F}_q^n$ diagonalisable, il y en a

$$|D_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{n_1+\dots+n_q=n,\ n_i\geq 0} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

et c'est un polynôme en q.

Application 18: Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, D diagonale sur $\mathbb{K}$ telle que $M = PDP^{-1}$.

Alors $e^M = Pe^DP^{-1}$.

III) Propriétés issues de la diagonalisabilité

1) Propriétés topologiques

On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables, $D_n'(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres toutes $\neq$.

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 19: $D_n(\mathbb{C})$ et $D_n'(\mathbb{C})$ sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

De plus $\overline{D_n(\mathbb{C})} = D_n'(\mathbb{C})$

Corollaire 20: Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\chi_M(M) = 0$

Définition 21: u est dit trigonalisable lorsque $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire.

Proposition 22: u est trigonalisable ssi χ_u est scindé.

Corollaire 23: Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u est forcément trigonalisable

Proposition 24: En notant $T_n'(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$, on a $T_n(\mathbb{R})$ est fermé et $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$

Proposition 25: $A \mapsto PA$ n'est pas continue pour $n \geq 2$.

2) Décomposition de Dunford

Lemme 26: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f.

On écrit $P = \lambda P_1^{\alpha_1} \dots P_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$

$\forall i \in [\![1,s]\!]$, on note $N_i = \ker(P_i^{\alpha_i}(f))$

On a alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ et $\forall i \in [\![1,s]\!]$, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Théorème 27: (Dunford) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$.

Alors $\exists!\ (d,n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que:

1) d est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
2) n est nilpotent
3) $d \circ n = n \circ d$
4) $d + n = f$.

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Application 28: Si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors celle de e^A est $e^D + e^D(e^N - I_n)$.

3) Codiagonalisation

Théorème 29: Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E tels que $\forall (i,j)$, $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$. Alors il existe une base de E commune de diagonalisation dans E.

Corollaire 30: Si $\mathrm{Card}(\mathbb{K}) \neq 2$,

$GL_n(\mathbb{K}) \overset{\text{groupe}}{\simeq} GL_m(\mathbb{K})$ ssi $n = m$

Corollaire 31: Si u et u' commutent et sont diagonalisables, alors $u + u'$ est diagonalisable.

IV) Diagonalisabilité des endomorphismes normaux

1) Théorème spectral et applications

Théorème 32 (Spectral) : 1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, D diagonale telle que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

2) Si on munit E $\mathbb{R}$-ev d'un produit scalaire et que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$, alors u est orthogonalement diagonalisable.

Application 33 : Exponentielle est un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Application 34 (Décomposition polaire) :

L'application $\varphi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$
$(O, S) \longmapsto OS$
est un homéomorphisme.

2) Cas général

Définition 35 : On suppose ici que E est un $\mathbb{K}$-ev euclidien.
On dit que u est normal lorsque $u \circ u^* = u^* \circ u$.
On dit que u est symétrique lorsque $u^* = u$, antisymétrique lorsque $u^* = -u$ et orthogonal lorsque $u^* \circ u = Id$.

Théorème 46 : 1) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u est normal ssi u se diagonalise en base orthonormale sur E.

2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et si u est normal, $\exists$ base $\mathcal{B}$ de E tel que

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & R_1 & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & R_p \end{pmatrix}$$

où $r + 2p = n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$

$R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ $b_i \neq 0$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.