

Leçon N° 154

Sous espace stable par un endomorphisme d'un espace vectoriel en dimension finie. Applications. Dans toute cette leçon, E désigne un K -ev de dimension finie n où K est un corps. $u \in \mathcal{L}(E)$, on note P_u son polynôme minimal et X_u son polynôme caractéristique.

I) Préliminaires

1) Définitions et premières propriétés.

Définition 1: Soit F un sev de E . On dit que F est stable par u lorsque $u(F) \subseteq F$.

Exemple 2: $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par u .

Exemple 3: Si E est un $\mathbb{R}$ -ev, u admet au moins une droite ou un plan stable.

Exemple 4: u est une homothétie si u stabilise toutes les droites de E .

Définition 5: Soit F un sev de E . On dit que u fixe F lorsque $\forall v \in F, u(v) = v$.

Remarque 6: Si u fixe F , alors u stabilise F .

Proposition 7: Si E est muni d'un produit scalaire, et si F est un sev stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

Application 8: Soient E un ev réel de dimension finie n , q une forme quadratique sur E de rang pair.

$\mathcal{O}(E)$ est engendrée par les réflexions orthogonales, plus précisément, si $u \in \mathcal{O}(E)$, u est produit d'un plus ou moins n réflexions.

$\text{SO}(E)$ est engendré par les rotations, plus précisément, si $u \in \text{SO}(E)$, u est produit d'un plus ou moins $n/2$ rotations.

Proposition 9: Si F est un sev stable par u , alors $u|_F \in \mathcal{L}(F)$ et $u|_{F^\perp}$ est un revêtement de $u|_F$.

Proposition 10: 1) Si F est un sev stable par u et si $B = B_F \cup B_{F^\perp}$ est une base de E adaptée à F , alors $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où

Applications.

$A = \text{Mat}_{B_F}(u|_F) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B = \text{Mat}_{B_{F^\perp}}(u|_{F^\perp}) \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$

où $\pi: E \rightarrow E/F$ projection canonique

de plus $X_u = X_{u|_F} X_{u|_{F^\perp}}$.

2) Réciproquement, si $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E telle que $\text{Mat}_B(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par u .

Application 11: X_u irréductible si u n'a pas de sev stable non trivial.

Application 12: (Théorème de Cayley-Hamilton) $X_u(u) = 0$.

2) Sous espaces stables : pourquoi et comment?

Remarque 13: Réduire un endomorphisme revient à trouver des sev stables.

Proposition 14: Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uv = vu$. Alors $\ker v$ et $\text{Im } v$ sont stables par u .

Corollaire 15: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker(P(u))$ stable par u .

Exemple 16: Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{id})$ est stable par u . (Sous espace propre de u associé à λ)

Exemple 17: Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, λ multiplicité de λ dans $X_u = \det(u - X \text{id})$

Proposition 18: F est stable par u si et seulement si $u|_F$ est stable par u .

Si $u|_F \in \mathbb{K}$, F stable par u si et seulement si $u|_F = \lambda \text{id}$ pour un λ .

Application 19: Si $u \in \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $u|_F$ est stable par u si $u|_F$ est valeur propre de u .

Proposition 20: (Lemme de Noether)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u . Si $P = \prod_{i=1}^r Q_i$ avec les Q_i premiers entre eux 2-à-2, alors les $\ker(Q_i(u))$ sont stables par u et

$E = \ker(P(u)) = \sum_{i=1}^r \ker(Q_i(u))$

II) Triangulation et diagonalisation.

Définition 37: Soit $x \in E$. On appelle espace cyclique engendré par x l'ensemble $\mathcal{U}(x) = \{P(x) \cdot x\} / P \in \mathcal{U}(X)$.

Définition 38: Soit $x \in E$, on appelle polynôme minimal de x relativement à $\mathcal{U}(x)$ le polynôme unitaire de $\mathcal{U}(X)$ tel que $P(x) \cdot x = 0$ et $\deg(P) = n$.

Proposition 39: Soit $x \in E$, $\mathcal{U}(x)$ est un s.v. de dimension $\deg(P_x)$ et donc une base est $(x, \dots, x^{n-1})$.

Proposition 40: $\exists x \in E$ tel que $P_x = P_A$.

Définition 41: x est cyclique lorsqu'il $\exists x \in E$ tel que $E = \mathcal{U}(x)$.

Définition 42: Si $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathcal{U}(X)$, la matrice compagnon de P est $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

Proposition 43: Avec les mêmes notations, $\chi_{C_P} = P$.

Théorème 44: x est cyclique si et seulement si $\chi_x = P_x$.

on $\deg(P_x) = n$

on $\exists B$ base de E tel que $\text{Mat}_B(x) = C_P$.

e) Réductions de Frobenius

Théorème 45: $\exists F_1, \dots, F_r$ s.v. de E stables par x tels que :

1) $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$

2) $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $u \in F_i$ est cyclique

3) $\forall i, n_i P_i = P_A$ et $\chi_{F_i}(x) = P_i$ et cette suite ne dépend pas de u et pas du choix des F_i .

Définition 46: La suite $(P_1, \dots, P_r)$ est appelée suite des invariants de similitude de x .

Théorème 47 (Frobenius) : Si $P_1, \dots, P_r$ sont les invariants de similitude de x , $\exists B$ base de E telle que $\text{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{P_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{P_r} \end{pmatrix}$.

De plus $P_i = P_u$ et $P_1 \dots P_r = P_A$.

Corollaire 48: x est semblable à $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si et seulement si $\chi_x = P_A$.

minors invariants de similitude.

f) Réductions de Jordan et normal.

Pour toute cette partie, E est un $\mathbb{R}$ -es. euclidien.

Définition 49: u est normal lorsqu'il $u \cdot u^* = u^* \cdot u$.

u est symétrique lorsqu'il $u^* = u$.

u est antisymétrique lorsqu'il $u^* = -u$.

u est orthogonal lorsqu'il $u^* u = u u^* = \text{Id}$.

Théorème 50: On note $R = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & R_s \end{pmatrix}$ avec $D_r \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $R_s \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ et $r + s = n$.

1) Si u est normal, $\exists B$ B.N. de E dans laquelle u a une matrice R avec D_r diagonale et $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ où $a_i^2 + b_i^2 = 0$.

2) Si u est symétrique, $\exists B$ B.N. de E où $S = 0$.

3) Si u est le plus antisymétrique, $D_r = 0$, $R_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$, $b_i \neq 0$.

4) Si u est le plus orthogonal, $D_r = (I_r - I_q)$ et

$\forall i \in \{1, \dots, s\}$, $R_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ avec $\theta_i \in]0, \pi[\setminus \{\pi/2\}$.