

Leçon N° 150

Polynômes d'endomorphismes en dimension finie - Réduction, Applications

Dans toute cette leçon, K est un corps commutatif, E un K - E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I) Polynômes d'endomorphismes

1) L'algèbre $\mathcal{M}(u)$

Définition 1: Soit $P \in \mathcal{M}[X]$ et $P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^i$, on définit $P(u)$ par $P(u) = \sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i u^i$ avec la convention $u^0 = Id_E$.

Proposition 2: $\mathcal{M}(u) = \{P(u), P \in \mathcal{M}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, 0, 1)$.

Proposition 3: Soit $P \in \mathcal{M}[X]$. $\{P(\lambda), \lambda \in \text{Sp}(u)\} \subseteq \text{Sp}(P(u))$ avec égalité si K est algébriquement clos.

Lemme 4: (des racines) Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de $\mathcal{M}[X]$ premiers entre eux deux à deux. On a $\mathcal{M}(P_1 \dots P_r(u)) = \mathcal{M}(P_1(u)) \oplus \dots \oplus \mathcal{M}(P_r(u))$.

Définition 5: L'annulateur de u est l'ensemble $\text{Ann}(u) = \{P \in \mathcal{M}[X], P(u) = 0\}$. Proposition 6: $\text{Ann}(u)$ est un idéal de $\mathcal{M}[X]$.

Définition 7: $\exists ! p_u \in \mathcal{M}[X]$ tq $\text{Ann}(u) = p_u \mathcal{M}[X]$, on appelle polynôme minimal de u ce polynôme.

Proposition 8: L'espace vectoriel $\mathcal{M}(u)$ est de dimension égale au degré de p_u . Une base écartée donnée par $(u^i)_{0 \leq i \leq \deg(p_u)-1}$.

Proposition 9: $\mathcal{M}(u)$ est un corps si $\mathcal{M}(u)$ est intègre ou si p_u est irréductible.

2) Polynôme caractéristique

Définition 10: Soit $P \in \mathbb{C}[n](K)$, on définit le polynôme caractéristique de P par $\chi_P = \det(X Id_n - P)$.

Définition - proposition 11: On définit le polynôme caractéristique de u comme le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une

base. C'est bien défini.

Proposition 12: $\chi_u = X^n + \dots + \text{tr}(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$.

Théorème 13: $\chi_u \in \text{Ann}(u)$ (Cayley - Hamilton).

Lemme 14: Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$, alors $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $\chi_u(\lambda) = 0$.

Proposition 15: Si pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on note m_λ la multiplicité de λ racine λ dans χ_u , on a $1 \leq m_\lambda \leq \dim(E)$ et $\sum m_\lambda = n$. χ_u est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

II) Diagonalisation et Trigonalisation

1) Diagonalisation

Définition 16: On dit que u est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Lemme 17: Les sous-espaces propres de u sont en somme directe.

Théorème 18: Les conditions suivantes sont équivalentes.

- u est diagonalisable.
 - $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda$.
 - χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \dim(E_\lambda) = m_\lambda$.
 - $\exists P \in \mathcal{M}[X]$ scindé à racine simple tq $P(u) = 0$.
 - p_u est scindé à racine simple.
- Exemple 19: Un projecteur est diagonalisable.
- Une symétrie est diagonalisable.

Proposition 20: Si u a n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Contre exemple 21: Un endomorphisme nilpotent (i.e. $\exists q \in \mathbb{N}^* \text{ tq } u^q = 0$) non nul n'est pas diagonalisable.

Théorème 22: Si $u, u' \in \mathcal{L}(E)$ sont trigonalisables et commutent,

alors, ils sont codimensionnels (i.e. linéariment indépendants dans une même base).

Lemme 23: On considère la matrice circulante $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$ et $\omega = e^{2\pi i/n}$

Alors $A = P(\omega) \text{ où } P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ et $A \sim \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & \dots & P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$

Application 24: Soit $P_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à n racines. On définit la suite de polynômes (P_i) par $P_{i+1} = P_i + P_0$, etc. Soit $q = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P_0(\omega^i)$. L'isobaryente de P_0 , la suite de polynômes converge géométriquement vers q .

2) Trigonalisation

Définition 25: On dit que u est trigonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Théorème 26: u est trigonalisable si X_u est scindé sur $\mathbb{K}$. On pu est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 27: si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

Lemme 28: Soit $\| \cdot \|$ une norme matricielle subordonnée définie sur $M_n(\mathbb{C})$. On a $\rho(A) \leq \|A\|$. Réciproquement, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, $\exists$ une norme subordonnée $\| \cdot \|_{A, \varepsilon}$ telle que $\|A\|_{A, \varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Lemme 29: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) < 1$, $\rho(A) < 1$.

- 1) $A^i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- 3) $\rho(A) < 1$
- 4) $\exists$ une norme matricielle subordonnée telle que $\|A\| < 1$.

Application

Proposition 30: Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Soit $(T, N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = T^{-1} N$. On considère la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} x_k \in \mathbb{R}^n \\ T x_{k+1} = N x_k + b \end{cases} \quad \text{On appelle cette méthode itérative de Richardson.}$$

III) Décomposition de Dunford et Jordan

1) Décomposition de Dunford

On suppose que X_u est scindé: $X_u = \sum_{i=1}^p (X - \lambda_i I) \alpha_i$.

Définition 31: On appelle sous-espace caractéristique de u les sous-espaces vectoriels $E_{\lambda_i} = \ker(X - \lambda_i I)^{\alpha_i}$.

Lemme 32: Soit F un polynôme annulateur de u .

On écrit $F = \prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^{\alpha_{ij}} (X - \lambda_{ij})^{\alpha_{ij}}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.

$\forall i \in \{1, \dots, s\}$, on note $N_i = \sum_{j=1}^{\alpha_{ij}} \alpha_{ij} (X - \lambda_{ij})^{\alpha_{ij}}$.

On a alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ et $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, la projection sur N_i parallèlement à $\sum_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u .

Théorème 33: (Dunford). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que X_u soit scindé. Alors: $\exists J, (d, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que: 1) d est négatif ou nul, 2) n est positif, 3) $u = d + n$ et d et n commutent.

De plus, d et n sont des polynômes en u .

2) Décomposition de Jordan

Lemme 34: Si u est nilpotent d'ordre $q \geq 2$, $\forall v \in E$ tel que $u^{q-1}(v) \neq 0$, la famille $B_v = (u^{q-1}(v), \dots, u(v), v)$ est l.b.e. et l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(B_v)$ est stable par u .

Lemme 35: Soit u est nilpotent d'ordre $p \geq 1$. $\exists \varphi \in E^*$ et $x \in E$

els que l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est orthogonal G dans E de $H = \text{Vect}(\varphi, u(\varphi), \dots, u^{q-1}(\varphi))$ sont stables par u avec $E = F \oplus G$.

Théorème 36: (Jordan) Si u est nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Il existe une base $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ telle que chaque sous $E_i = \text{Vect}(B_i)$ soit stable par u et la matrice de la restriction de u à E_i est $S_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ avec $q_i = \dim(E_i)$.

IV) Exponentielle de matrices

Lemme 37: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, la série $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$ est convergente.

Définition 38: Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit $e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$.

Proposition 39: $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $e^A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Propositions 40: 1) $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, e^A et A commutent.

2) Si A et B commutent, $e^{A+B} = e^A e^B$.

3) $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $e^A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

4) $\forall P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$.

Théorème 41: L'application $M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Proposition 42: Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la décomposition de Jordan de $\exp(u)$ est $\exp(u) = \exp(d) + \exp(n) \rightarrow I_n$ où $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de u .

V) Décomposition de Frobenius

Définition 43: On dit que u est cyclique lorsque il existe $v \in \mathbb{C}^n$ tel que $(v, u(v), \dots, u^{n-1}(v))$ soit une base de E .

Définition 44: Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. La matrice compagnon de P est $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 45: Il y a équivalence entre :

- 1) u est cyclique
- 2) $\exists$ base de E telle que la matrice de u dans cette base soit une matrice compagnon.
- 3) $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $E = \langle x, u(x), \dots, u^{n-1}(x) \rangle$.
- 4) $\deg(P_u) = n$
- 5) $X_u = P_u$.

Théorème 46: (Frobenius). Il existe $r \in \mathbb{N}^*$, des sous-espaces $F_1, \dots, F_r$ et des polynômes unitaires non constants $P_{u,1}, \dots, P_{u,r}$ tels que : 1) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$.

2) $\forall i \in [1, r]$, F_i est stable par u et $u|_{F_i}$ est cyclique de polynôme minimal $P_{u,i}$.

3) $P_{u,1} \mid P_{u,2} \mid \dots \mid P_{u,r}$.

Une telle décomposition est appelée une décomposition de Frobenius de u . Les sous-espaces de similitude de u .

On a la relation $P_{u,i} = P_u \cdot \prod_{j=1}^{i-1} P_{u,j} = X_u$.

De plus il existe une base e de E telle que

$$\text{Mat}(u, e) = \begin{pmatrix} C_{P_{u,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_{u,r}} \end{pmatrix}$$

Enfin, deux endomorphismes de E sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude.