

Leçon N° 149 : Déterminants. Exemples et applications.

Soit E un K -ev de dimension finie n avec K un corps.

I) Déterminant : comment le définir ?

1) Les formes multi-linéaires

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1 : Soit f une forme p -linéaire sur E ($\in \mathcal{L}_p(E/K)$).

f est dite alternée lorsque $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.

2) f est dite antisymétrique lorsque si l'on échange deux vecteurs parmi les x_i ($x_1, \dots, x_p$) dans la somme $\sum$ de ses valeurs opposées.

Remarque 2 : f est antisymétrique si $\forall \sigma \in \mathcal{S}_p$ $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \in E^p$

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$$

Proposition 3 : Soit $f \in \mathcal{L}_p(E/K)$, l'alternée $\Rightarrow f$ antisymétrique

Proposition 4 : Soit $f \in \mathcal{L}_p(E/K)$ alternée.

Si $(x_1, \dots, x_p)$ est un système l.e., alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Corollaire 5 : Soit $f \in \mathcal{L}_p(E/K)$ alternée. On ne change pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_p)$ en ajoutant à un des x_i une combinaison linéaire des autres x_i .

2) Déterminants de vecteurs

Préliminaire 6 : $\mathcal{L}$ espace vectoriel $\mathcal{L}_n(E/K)$ de forme n -linéaire alternées est de dimension 1. Plus précisément, $\forall$ base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , $\exists ! \varphi_{\mathcal{B}}$ forme n -linéaire alternée telle que $\varphi_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ et elle engendre $\mathcal{L}_n(E/K)$.

Elle est déterminée par la formule suivante : $\forall i, j = \overline{1, n}$ $x_{ij} \in E$ alors $\varphi_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i), i}$.

Définition 7 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ alors $\varphi_{\mathcal{B}}$ est le déterminant de $\mathcal{B}$ et $(x_1, \dots, x_n)$ par rapport à $\mathcal{B}$ et $\varphi_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est noté $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 8 : Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux bases de E alors, on a $\varphi_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) = \det_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n)$.

Préliminaire 9 : Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est l.e.
- 2) $\forall \mathcal{B}$ base de E , $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$
- 3) $\exists \mathcal{B}$ base de E tel que $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

Corollaire 10 : Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$, cette famille est une base de E si et seulement si $\exists$ base $\mathcal{B}$ de E tel que $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

3) Déterminant d'un endomorphisme

Définition 11 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

L'application $E^n \rightarrow K$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

est n -linéaire alternée.

$$\text{Donc } \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

$$\text{On note } \det_{\mathcal{B}}(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Proposition 12 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $\det_{\mathcal{B}}(u_i)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$. On note alors le déterminant de $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\det f$.

Proposition 13 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in K$. On a :

- 1) $\det(f \circ g) = 1$
- 2) $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f) = \det(f) \det(g)$
- 3) $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
- 4) $\det(f) \neq 0$ si $f \in \text{GL}(E)$. Réciproquement $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$

4) Déterminant d'une matrice

Définition 14 : Soit $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(K)$, le déterminant de A est le scalaire :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$$

Proposition 15 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice $A \in \text{Mat}(K)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E , alors $\det(A) = \det(f)$.

Définition 16 : Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base A n'a pas de sens car $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ et on étend la définition : $\det(\mathcal{B}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$.

II) Méthodes de calcul de déterminants

A) Propriétés élémentaires

Proposition 17 : Soit $\mathcal{B} \in \text{Mat}(K)$, $\det(\mathcal{B}) = 0$ ssi

Les colonnes de M sont les e_i , on les appelle les e_i .

Proposition 18: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note (e_j) les colonnes de A .

1) Soit $\sigma \in S_n$, $A\sigma = (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)})$ alors $\det(A\sigma) = \varepsilon(\sigma) \det(A)$.

2) Soit σ on multiplie une colonne par λ alors on multiplie le $\det(M)$ par λ .

3) $\forall i \neq j$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, la opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne change pas $\det(M)$.

Remarque 18: On a la même propriété si on change une $\det(M^T) = \det(M)$.

2) on va introduire l'adjointe par blocs

Définition 20: Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ où A_{11}, A_{22} sont carrés

On a alors $\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$.

Corollaire 21: Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

Application 22: Via les opérations élémentaires, on étudie une matrice unitaire unitaire par l'adjointe par blocs avec une complexité en $O(n^3)$.

3) Inverse et cofacteur

Définition 23: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$.

A^{-1} , on appelle inverse de A l'élément a_{ij}^{-1} le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A .

2e opération $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ A appelle le cofacteur de a_{ij} .

Définition 24: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$.

un inverse d'une matrice A est l'élément A^{-1} une matrice carrée inversible qui est adjointe de A . On peut écrire $(I, -A^{-1}) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(n)$, défini un inverse d'ordre 2, noté $\Delta I^{-1} / M$.

Proposition 25: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ symétrique. On note $A^{-1} = (a_{ij}^{-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

C'est défini par $a_{ij}^{-1} = a_{ji}$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Proposition 26: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Avec la rang r on peut dire un inverse d'ordre $n+1$ se fait par un mineur d'ordre $n+1 \neq 0$.

Application 27: $\det(A) = \det(A^T)$.

1) $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det(A^T)$ est un fait de $M_n(\mathbb{K})$.

2) $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det(A^T)$ est un fait de $M_n(\mathbb{K})$.

Remarque 28: On a la même propriété si on change une $\det(M) = \det(M^T)$.

Proposition 29: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

1) $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \det(A)$.

2) $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0$ si $i \neq k$.

Application 30: 1) (fondamental): $\det(A_1, \dots, A_n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_{jj} - a_{ii})$

2) $C \in M_n(\mathbb{K})$, $\forall i, j$ $a_{ij} + b_{ij} \neq 0$, $(\frac{1}{a_{ij} + b_{ij}})_{1 \leq i, j \leq n}$ a pour déterminant:

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij} - b_{ji})}$$

Application 31: Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Pour toute famille de vecteurs $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $P(\lambda) = 0$ $\forall i \in \mathbb{R}^n$.

Définition 32: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de cofacteurs des éléments de A est appelée comatrice de A et on la note $\text{Com}(A)$.

Proposition 33: $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \text{Com}(A) = \text{Com}(A)A^{-1} = \det(A)I_n$.

On peut aussi, si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} = \det(A)^{-1} \text{Com}(A)$.

III) Déterminants et géométrie

1) Volume

Soit $\mathbb{R}^n$, le déterminant a une interprétation géométrique, c'est la façon de calculer le volume.

Exemple 34: $e = (e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$ nous se la mesure usuelle qui vérifie $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Soit $v_1, \dots, v_n$ un vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $\text{Vol}(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$. On a alors $\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$.

Proposition 35: Soient p la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $X \in \mathbb{R}^n$ une matrice normale de $\mathbb{R}^n$. Alors $p(u(X)) = |\det u| \cdot p(X)$.

2) Matrices de Gram et auto-adjointes

Définition 36: Soit E un espace préhilbertien et $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs de E , $u \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle matrice de Gram $g_u(x_1, \dots, x_n)$ la matrice $[G_{ij}]$ $1 \leq i, j \leq n$. On appelle déterminant de Gram D_u déterminant de cette matrice noté $D_u(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 37: Toute matrice de Gram est hermitienne positive.

Réciproquement, toute matrice hermitienne positive est une matrice de Gram de n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E . Elle est définie par (x_i) et E bien.

Théorème 38: Soit E un préhilbertien, V un sous- E muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(V)$, alors la matrice A de u s'évalue

$$A_{ij} = \frac{G(e_1, \dots, e_n, u e_j)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

IV) Applications linéaires déterminantes

1) Pré-structure d'isomorphismes

Définition 39: Le polynôme caractéristique de $M \in \mathcal{M}(K)$ est le polynôme $P_M \in K[X]$ défini par $P_M = \det(XI_n - M)$.

Définition 40: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E . Le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique de la matrice de u dans la base B . C'est un réel indépendant de la base choisie.

Proposition 41: Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$. $\lambda \in \text{Sp}(u)$ si $\chi_u(\lambda) = 0$.

Exemple 42: soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in K[X]$ et $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ la matrice compagnon de P .

Alors $\chi_{C_P} = P$.

Théorème 43: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_A \chi_B = \chi_C$.

1) u est cyclique

2) $\exists B$ base de E telle que $\text{Mat}_B(u)$ soit une matrice compagnon

3) $\deg P_u = n$

4) $\chi_u = P_u$

Proposition 44: Soient $U, V \in \mathcal{M}(K)$, $\chi_{UV} = \chi_{VU}$

Théorème 45: (Caley-Hamilton) Soit $U \in \mathcal{M}(K)$, $\chi_U(U) = 0$.

2) Calcul différentiel

Théorème 46: $\forall X, H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $D \cdot \det(X)$ $(H) = \text{tr}(H'X)$ où X est la matrice de X .

Application 47: (Théorème de Liouville) Soient $(y_1, \dots, y_n)$ des solutions λ valeurs dans $\mathbb{R}^n$ du système différentiel linéaire $y' = A(t)y$, où A est $\mathcal{C}^0$.

Alors $W'(t) = \text{tr}(A(t))W(t)$

En particulier $\det(e^{tA}) = e^{\int_0^t \text{tr}(A) dt}$.

3) Calcul intégral

Théorème 48: (Changement de variables) Soient U et V contenus dans $\mathbb{R}^n$, $\varphi: U \rightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Alors $\forall f: V \rightarrow \mathbb{R}$ bornée,

$$\int_V f \circ \varphi(x) |\det D\varphi(x)| dx = \int_U f(y) dy$$

Application 49: $\forall x > 0$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.