

Leçon N° 148. Dimension d'un espace vectoriel.

Dans toute cette leçon, K est un corps commutatif, E est un espace vectoriel.

I) Bases et dimension d'un espace vectoriel.

1) Familles génératrices et famille libre.

Définition 1: Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On appelle combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$ toute somme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où les $\lambda_i \in K$ et où les x_i sont presque tous nuls.

Définition 2: L'ensemble F des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i \in I}$ est un sev de E noté $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. C'est le plus petit sev de E contenant tous les x_i .

Définition 3: Soit $A \subseteq E$. On note $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(a)_{a \in A}$. On dit que A est une partie génératrice de E lorsque $\text{Vect}(A) = E$.

Définition - Proposition 4: Soit $(x_i)_{i \in I} \subseteq E$. On dit que cette famille est libre lorsque une des deux conditions suivantes équivalentes est satisfaite:

- 1) Toute combinaison linéaire s'écrivant $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ implique $\lambda_i = 0$.
- 2) Aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Une famille non libre est appelée liée.

Théorème 5: Si E est engendré par un nombre fini n de vecteurs, toute famille libre a au plus n éléments.

2) Base d'un espace vectoriel.

Définition 6: Une famille libre et génératrice de E est appelée base de E .

Proposition 7: Si E admet une base $(e_i)_{i \in I}$. Alors pour tout vecteur $x \in E$, il s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i .
 $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ et les λ_i s'appellent coordonnées de x dans $(e_i)_{i \in I}$.

Définition 8: On dit que E est la dimension finie $\dim(E)$ si E admet une famille génératrice finie de E .

À partir de maintenant E est supposé de dimension finie.

Rang. Exemples et Applications.

Théorème 9: Soient E un système fini de générateurs de E , $F \subseteq E$ un système libre. Alors F est une base de E telle que $F \subseteq B \subseteq E$.

Corollaire 10: Tout K -ev de dimension finie admet une base.

Corollaire 11: (il y a la base extraite) De toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E .

Corollaire 12: (il y a la base incomplète) Toute partie libre de E peut être complétée en une base de E .

Exemple 13: K^n admet comme base $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ appelée la base canonique de K^n .

1) $K_n[X]$ admet comme base $(1, X, \dots, X^{n-1})$.

3) Théorie de la dimension.

Définition - Proposition 14: Toutes les bases de E ont même cardinal $n \in \mathbb{N}$. Il s'appelle la dimension de E et est noté $\dim E$.

À partir de maintenant E est supposée de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 15: 1) Tout système libre de $n+1$ vecteurs de E est une base de E .
 2) Tout système générateur de n vecteurs de E est une base de E .

Proposition 16: Soient $E_1, \dots, E_r$ K -sev de E .

$$E = \bigoplus_{i=1}^r E_i \quad \text{si} \quad E = \sum_{i=1}^r E_i \quad \text{et} \quad n = \sum_{i=1}^r \dim E_i.$$

Proposition 17: (Formule de Grassmann): Soient E_1, E_2 deux sev de E , alors $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.

II) Applications linéaires, rang et noyau.

Dans cette partie F est un K -ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Rang d'une application linéaire.

Définition 18: On appelle image de f l'ensemble noté $\text{Im}(f) = f(\text{Noi}) = \{x \in F \mid \exists y \in E, x = f(y)\}$. On appelle image de f l'ensemble noté $\text{Im}(f) = f(E)$. Les ensembles $\text{Noi}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sev.

Théorème 19: Soit F un s.v. de E , alors F est de dim finie et $\dim F \leq \dim E$.
rec. égalitéssi $F = E$.

Définition 20: On appelle rang de f l'entier $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$.

Théorème 21: $\text{Im}(f) \cong \text{Ker } f$.

Corollaire 22: (rel. au rang) : $\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f$.

Corollaire 23: Si $\dim E = \dim F$ (on parle de $\text{rg } f \in \mathcal{L}(E)$),
 f est bijective ssi f est injective ssi f est surjective.

Contre exemple 24: Le noyau est forme en dimension infinie: cf
 $\mathbb{R}[X] \xrightarrow{p} \mathbb{R}[X]$ surjective mais non bijective.

2) Rang d'une matrice.

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N})^2$.

Définition 25: Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le rang de ses
 de colonnes dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition 26: Si A est la matrice de f dans une base, $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$.

Remarque 27: $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\text{rg}(A) \leq \inf(m, n)$

2) Si $A \in \mathcal{M}_{\text{sym}}(\mathbb{K})$, A est inversible ssi $\text{rg}(A) = n$.

Théorème 28: Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. On note $r := \text{rg}(A)$. Alors A
 est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Corollaire 29: Deux matrices A et B sont équivalentes ssi elles
 ont même rang.

Définition 30: Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1, n\} \\ j \in \{1, m\}}}$, $I \in \{1, n\}$ et $J \in \{1, m\}$
 non vides. La matrice $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \{1, n\} \\ j \in \{1, m\}}}$ s'appelle la matrice
 obtenue de A .

Théorème 31: Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, le rang de A est le plus grand des
 ordres des matrices carrées extraites indéfinies de A .

Corollaire 32: Le rang de $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ est égale à celui de son transposé.

Théorème 33: (Carré de Cauchy) Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $r := \text{rg}(A)$.

Le rang est invariant par produit de matrices de transposées et de rotations.

III) Applications.

1) Inverse de Sylvester.

Soit q une forme quadratique sur E . On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Lemme 34: Soit F un s.v. de E .

On a $\dim(F^\perp) + \dim(F) \geq \dim(E)$ avec égalité si q est non dégénérée
 $E = F \oplus F^\perp$ ssi $q|_F$ est non dégénérée.

Théorème 35: $\exists ! (a, b) \in \mathbb{N}^2$ tq $\forall (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base q -orthogonale
 de E , $a = \# \{ i \in \{1, n\} \text{ tq } q(e_i) > 0 \}$ et $b = \# \{ i \in \{1, n\} \text{ tq } q(e_i) < 0 \}$
 On a $a + b = \text{rg}(q)$ et $(a, b) = \text{sign}(q)$.

Lemme 36: Notons $\mathcal{O}(\text{resp } \mathcal{P})$ l'ensemble des s.v. F de E tels que
 $q|_F$ soit définie positive (resp définie négative). En notant $(q, b) = \text{sign}(q)$,
 On a $b = \max_{F \in \mathcal{O}} \dim(F)$, $a = \max_{F \in \mathcal{P}} \dim(F)$.

Théorème 37 (Sylvester): Si q est de signature (a, b) ,
 $q = \sum_{i=1}^a x_i^2 - \sum_{j=1}^b y_j^2$ où les x_j sont des formes linéaires
 indépendantes. $D = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & -I_b \end{pmatrix}$ est une matrice de
 q pour cette base.

2) Générateurs de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$

Soient encore q une forme quadratique sur E et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
 Supposons que q est définie positive.

Lemme 38: Si $n \geq 3$, Soient τ_1, τ_2 deux réflexions sur E , $\exists \sigma_1, \sigma_2$ deux renversements sur E tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Théorème 39: 1) $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales, plus précisément, si $u \in O(E)$, il est produit d'un plus ou moins n réflexions.

2) Si $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements, plus précisément, si $u \in SO(E)$, il est produit d'un plus ou moins n renversements.

3) Décomposition de $O(E)$ en produit de transpositions

Lemme 40: Soient $f \in Z(E)$ et $F \in M(X)$ un polynôme annulateur de f . On écrit $F = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{a_i}$. $M_s^{a_i}$ la décomposition en produits de facteurs irréductibles de F . $V_i \in [1, s]$, $N_i = \ker (F_i)^{a_i}(f)$. On a alors $E = \bigoplus_{i=1}^s N_i$ et $V_i \in [1, s]$, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f .

Théorème 41: (Burnside) Soit $f \in Z(E)$ (ou son polynôme annulateur) X_f sont scindés sur K . $\exists (d, n) \in (Z(E))^2$ tel que X_f est décomposable

1) n est impair

2) $f = d + n$

3) d est commutatif.

De plus, d et n sont des polynômes en f .

IV) Dualité

1) Définitions et propriétés

Définition 42: On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire α de E dans K . On appelle dual de E $E^* = Z(E, K)$.

Proposition 43: Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , alors $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ base de E^* où $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. En particulier $\dim E^* = \dim E$ et $\forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$.

Proposition 44: Si $x \in E$, on note $\tilde{x} : E^* \rightarrow K, \alpha \mapsto \alpha(x)$ et $\tilde{x} \in E^{**}$ et $f : E \rightarrow E^{**}, x \mapsto \tilde{x}$ est un isomorphisme.

Proposition 46: Si $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ est base de E^* , $\exists$ base $(e_1, \dots, e_n)$ de E tel que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, c'est la base duale.

Définition 47: Soient $(u, \varphi) \in E \times E^*$, u et φ sont dits orthogonaux lorsque $\varphi(u) = 0$.

Si $A \subseteq E, A^\perp = \{ \varphi \in E^* \mid \forall u \in A, \varphi(u) = 0 \}$

Si $B \subseteq E^*, B^\circ = \{ u \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(u) = 0 \}$

Théorème 48: Si F est un s.v. de E , alors $F + F^\perp = E$ et $F^\perp = F^\circ$.

2) Applications

Application 49: 1) Soit $A \in M_n(K), f_A : X \mapsto T_n(AX)$, alors $f : A \mapsto f_A$ définit un isomorphisme entre $M_n(K)$ et $M_n(K)$.

2) Soit $f \in M_n(K)$ (ou $V(X, Y) \in M_n(K)$), $g(X, Y) = f(YX)$, $\exists \lambda \in K$ (ou $VXC M_n(K)$), $g(X) = \lambda T_n(X)$.

3) Si $n \geq 2$, l'anneau des polynômes de $M_n(K)$ est commutatif.

4) Soit $(A, B) \in M_n(K)^2$, $\exists \lambda \in K$ équivalence entre :
 (i) $\exists X \in M_n(K), AX + XA = B$
 (ii) $V \subset M_n(K), AV + VA = 0 \Rightarrow T_n(B) = 0$.

Lemme 50: Soit $u \in Z(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. $\forall v \in E$ (ou $\forall v \in E$) $u^q(v) = 0$. On définit $B_u, u = (u^q(x))$ et L_u et $F = V \cap L_u$ est stable par u .

Lemme 51: Soit les mêmes hypothèses, $\exists \varphi \in E^*$ et $u \in E$ tels que $F = V \cap L_u$ et $u^q(x) = 0$ est orthogonal à F dans E et $L_u = V \cap L_u$ et $u^q(x) = 0$ sont stables par u avec $E = F \oplus L_u$.

Théorème 52: Soient les mêmes hypothèses.

1) base de $E^* : B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ telle que chaque s.v. $E_i = V \cap L_{u_i}$ est stable par u et la matrice de la restriction de u à E_i est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ où $\sigma_{q_i}(u) = \dim(E_i)$, $i \in [r]$.

On remarque aussi pour les de corps et la base est : $u^q(x) = 0$