

Leçon N°106: Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie - Sous groupe de $GL(E)$: Applications.

Dans cette leçon K est un corps commutatif, E est un K -espace vectoriel.

I) Le groupe linéaire.

1) Présentation.

Définition 1: On appelle groupe linéaire de E l'ensemble des automorphismes (d'espace vectoriel) de E . On le note $GL(E)$.

Définition 2: $\forall n \geq 1$, $GL_n(K)$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$.

Proposition 3: $(GL(E), \circ)$ et $(GL_n(K), \times)$ sont des groupes $\forall n \geq 1$.

Proposition 4: Si E est de dimension finie $n \geq 1$, le choix d'une base de E permet de résoudre un isomorphisme d'algèbre de $L(E)$ sur $M_n(K)$ qui induit un isomorphisme du groupe de $GL(E)$ sur $GL_n(K)$.

Proposition 5: Si E est de dimension finie $n \geq 1$. Pour $u \in L(E)$, il y a équivalence entre: 1) $u \in GL(E)$

- 2) $\ker(u) = \{0\}$ i.e. u injective
- 3) $\text{Im}(u) = E$ i.e. u surjective
- 4) $\forall v \in E, u(v) = v$
- 5) $\det(u) \neq 0$

6) u transforme toute base de E en une base de E .

7) $\exists v \in L(E)$ tq $uv = Id$

8) $\exists v \in L(E)$ tq $v \circ u = Id$.

2) Déterminant et groupe spécial linéaire.

Dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$.

Définition 6: Soit $M \in M_n(K)$, $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

On définit le déterminant de M comme étant $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i, \sigma(i)}$

Définition - Proposition 7: Soit $\mathcal{B}$ une base de E , $u \in L(E)$ et M la matrice de u dans $\mathcal{B}$. On a: $\det \mathcal{B}(u) = \det(M)$.

II

qui est en réalité indépendante de la base choisie. Cela permet même de définir $\det(u)$.

Définition 8: $SL(E) = \{u \in L(E), \det(u) = 1\}$

$$SL_n(K) = \{A \in M_n(K), \det(A) = 1\}$$

Proposition 9: $SL(E)$ est un sous groupe de $(GL(E), \circ)$.

Proposition 10: $Z(GL(E)) = \{u \neq 0, Id\}$

$Z(SL(E)) = \{u \in GL(E), Id\}$ car $M_n(K)$ est le groupe des racines n -ièmes de l'unité dans K .

3) Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$.

Étant donné, supposons de dimension finie $n \geq 1$.

Définition - proposition 11: Soit H un hyperplan de E et soit $u \in GL(E)$ tel que $u|_H = Id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1) On a $\det(u) = \lambda \neq 1$ i.e. $u \notin SL(E)$.
- 2) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et u est diagonalisable.
- 3) $\text{Im}(u - Id) \neq H$.
- 4) Il existe une base convenable, u a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in K^* \setminus \{1\}$

On dit alors que u est une dilatation d'hyperplan H , le scalaire λ de rapport λ .

On a alors $\lambda = \text{Tr}(u - Id)$ et $M = \text{Car}(u - Id)$

Lemme 1: $\lambda = -1$ et $\dim(H) \neq 2$, on parle de réflexion.

Définition - proposition 12: Soit H un hyperplan de E muni d'une forme linéaire $\phi \neq 0$. Soit $u \in GL(E)$, $u \neq Id$ tq $u|_H = Id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) $\det(u) = 1$ i.e. $u \in SL(E)$

2) u n'est pas diagonalisable

3) $\lambda = \text{Tr}(u - Id) \neq 1$

4) $L(E)$ morphisme induit, $u: E/H \rightarrow E/H$ est l'identité de E/H .

5) $\lambda \in \mathbb{H}$, $\lambda \neq 0, 1$ $\ln \in \mathbb{E}$, $u^{(n)} = \lambda + \beta(n) \alpha$.

6) Dans une base canonique, u a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On dit alors que u est une transition d'hyperplan H et de droite D .

Proposition 13: Soit $u \in GL(E)$, $u \neq Id$. Les hyperplans engendrés sont éparpillés: 1) u est une transition de droite D .

2) $u(H) = H$ et le morphisme induit $\bar{u}: E_D \rightarrow E_D$ est l'identité.

Proposition 14: Soit τ une transition de droite D et d'hyperplan H de mat $u \in GL(E)$. Alors $\tau \in u^{-1}$ est une transition de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$.

Lemme 15: Les transitions engendrent $SL(E)$.

Corollaire 16: Les transitions et les identités engendrent $GL(E)$.

Application 17: (Pivot et Gauss) Pour résoudre le système $AX = 0$ d'inconnue X , avec $A \in M_{n,m}(K)$. On cherche $(P, Q) \in GL_n(K) \times GL_m(K)$ telle que $PAQ^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec r le rang de A . Cela peut se faire en effectuant des opérations linéaires sur les lignes et les colonnes de A .

II) Autres sous-groupes de $GL(E)$ et $SL(E)$.

1) Les sous-groupes classiques.

Proposition 18: Soit $u \in GL(E)$. Si u laisse invariante toute la droite, alors u est une homothétie.

Proposition 19: 1) On a $D(SL(E)) \subseteq D(GL(E)) \subseteq SL(E)$

2) Pour $n \geq 3$, on a $D(SL(E)) = D(GL(E)) = SL(E)$

3) Pour $n=2$, $u \neq Id$, $D(GL(E)) = SL(E)$

Si $u \neq Id$ et $u \neq Id$, $D(SL(E)) = SL(E)$

Si $u = Id$, $GL(E) = SL(E)$ et $D(SL(E)) \simeq O_2$.

Si $u = Id$, $D(SL(E)) \simeq H_E$.

2) Espace orthogonal, euclidien.

Est un espace vectoriel réel. Il est une forme quadratique sur E et f sa forme polaire. Il est supposé défini positive.

Définition 20: Soit $u \in GL(E)$, on dit que u est une isométrie lorsque $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$

On note $O(q)$ l'ensemble des isométries de E .

Définition 21: $SO(q) = O(q) \cap SL(E)$.

Proposition 22: $O(q)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, O

$SO(q)$ est un sous-groupe de $(SL(E), \circ)$.

Lemme 23: Soit $n \geq 3$ et τ_1, τ_2 deux réflexions, $\tau_1 \tau_2, \sigma_1$ et σ_2 sont engendrés par les réflexions orthogonales.

plus précisément, si $u \in O(E)$, u est produit d'un plus ou moins

2) si $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les réflexions, plus précisément, si $u \in SO(E)$, u est produit d'un plus ou moins

$SO_3(\mathbb{R})$ est simple. u est normale.

3) Espace unitaire et hermitien.

Est un espace vectoriel complexe. Il est une forme quadratique ϵ , ϵ est un produit hermitien sur E .

Définition 24: On note $U(E)$ l'ensemble des isométries de E , i.e. $\{u \in GL(E) \mid \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \mid \forall (x, y) \in E\}$

Définition 25: On note $U(E)$ l'ensemble des isométries positives de E .

Proposition 26: 1) $U(E)$ est un sous-groupe de $GL(E, \mathbb{C})$

2) $U(E)$ est un sous-groupe de $(SL(E, \mathbb{C}), \circ)$.

Théorème 29: (Accompagnement polaire) : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

$\exists U \in U_n(\mathbb{C})$ et $H \in H_n(\mathbb{C})$ tel $A = UH$.

Le plan est $A \in GL_n(\mathbb{C})$, cette décomposition est unique.

Lemme 30: Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne réelle.

$\exists i, R$ hermitienne positive telle que $H = R^2$.

4) Induction de permutation

Proposition 31: Soit $\sigma \in S_n$, $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On définit u_σ par $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ alors $u_\sigma \in GL(E)$.

Proposition 32: L'application $\sigma \mapsto u_\sigma \in GL(E)$ est un isomorphisme injectif.

Proposition 33: $\forall \sigma \in S_n$, $\det(u_\sigma) = \epsilon(\sigma)$.

Lemme 34: Soit β la matrice $n \times n$ donnée par $P_\sigma = (p_{ij})$ $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a $P_\sigma P_\sigma^t = P_\sigma P_\sigma^t$ et $\det P_\sigma = \epsilon(\sigma)$.

III) Théorème de Cartan et de ses sous-groupes

1) Action de $GL(E)$ sur les bases de E .

Définition 35: On fait agir $GL(E)$ sur E par $u \cdot x = u(x)$ et sur les bases de E par $u \cdot \beta = u(\beta)$.

Lemme 36: Les 2 actions sont transitives.

Proposition 37: Si $q = p^2$, on a $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$.

Théorème 38: Soit $q = p^2$.

Le nombre de matrices triangulaires dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est égal à

$$\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) = |GL_n(\mathbb{F}_q)|$$

Exemple 39: Il y a 16 matrices triangulaires dans $GL_2(\mathbb{F}_2)$ sur $\mathbb{F}_2$.

2) Action sur les espaces de matrices

Exemple 40: $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $M_n(\mathbb{K})$ par multiplication à gauche et les orbites sont les hyperplans avec le 0 et $\mathbb{K}^n$.

On a $A \sim B$ si $\text{Ker } A = \text{Ker } B$.

On a que une matrice est dans l'orbite d'une unique matrice équilibrée réversible, qui se peut obtenir par multiplication à gauche par des matrices inversibles.

Exemple 41: Si $n \in \mathbb{N}^*$, $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $M_n(\mathbb{K})$ par $(P, T) \cdot X = PXT^{-1}$. Deux matrices ayant la même

orbite sont dites équivalentes.

On a $A \sim B$ si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

Application 42: $\text{rg}(IT) = \text{rg } T$.

3) Action par conjugaison

Définition 43: $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $M_n(\mathbb{K})$ par $P \cdot T = PTP^{-1}$. Cette action traduit le changement de base pour la matrice d'un endomorphisme. La relation d'équivalence correspond à l'équivalence des orbites de cette action.

Proposition 44: 2 matrices de $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables si elles le sont dans $M_n(\mathbb{K})$.

Application 45: conjugaison, triangulation, Jordan, Frobenius...

4) Action par conjugaison

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E euclidien.

Définition 46: $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $S_n(\mathbb{R})$ par $P \cdot A = P^t A P$. Ce est le changement de base pour les formes quadratiques.

Théorème 47 (Sylvester): Les orbites sont en bijection canonique avec les couples d'orbites (P, q) tel que $P^t q = n$ et $P, q \geq 0$.

C'est la répartition des formes quadratiques.