162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

L'ensemble $\mathbf{K}$ désigne un corps de caractéristique différente de deux. Les entiers m et n sont fixés, non nuls. Une matrice est de taille $m \times n$.

1 Systèmes linéaires

1.1 Systèmes échelonnés

Définition 1. *Soit $(a_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ des coefficients dans $\mathbf{K}$. Une équation linéaire de terme constant $\mathbf{b}$ dans $\mathbf{K}$ est un problème visant à trouver l'ensemble des solutions $(\mathbf{x}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de l'équation à n inconnues :*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{x}_j = \mathbf{b}. \tag{1}$$

Définition 2. *Soit $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $(\mathbf{b}_j)_{1\leqslant i\leqslant m}$ des coefficients dans $\mathbf{K}$. Un système linéaire est ensemble de m équations linéaires visant à résoudre pour tout i dans $[1,m]$ l'équation d'inconnues $(\mathbf{x}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{x}_j = \mathbf{b}_i. \tag{2}$$

Remarque 3. *Avec les notations précédentes les coefficients sont identifiés à une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$, le terme constant et les inconnues sont identifiés respectivement à un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbf{K}^m$ et $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$. Un système est donc équivalent à une équation matricielle d'inconnue $\mathbf{x}$:*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\mathbf{x}_1 + \dots + a_{1j}\mathbf{x}_j + \dots + a_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ a_{i1}\mathbf{x}_1 + \dots + a_{i,j}\mathbf{x}_j + \dots + a_{i,n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ a_{m1}\mathbf{x}_1 + \dots + a_{m,j}\mathbf{x}_j + \dots + a_{m,n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{cases}. \tag{3}$$

Exemple 4.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 = 2 \\ 5\mathbf{x}_1 + 6\mathbf{x}_2 = 5 \\ 4\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Définition 5. *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice associée à un système linéaire. Soit $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ les lignes de A. Soit pour i dans $[1,n]$:*

$$l_i = \begin{cases} n+1 \text{ si } L_i = 0 \\ \min\{j \in [1,n] \mid a_{ij} \neq 0\} \text{ sinon} \end{cases} \tag{5}$$

La matrice (ou le système) est échelonnée en ligne si pour tout i dans $[1, n-1]$:

- *Si $l_i = n+1$, alors $l_{i+1} = n+1$.*
- *Sinon, $l_i < l_{i+1}$.*

Proposition 6. *Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de lignes non nulles.*

Exemple 7. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est échelonnée de rang 3.*

1.2 Existence et unicité des solutions

Définition 8. *Un système est homogène si son membre constant est nul.*

Remarque 9. *Un système homogène admet au moins le vecteur nul comme solution.*

Proposition 10. *Un système homogène de matrice A a pour solution le sous-espace vectoriel $\ker A$ de dimension $n - \operatorname{rg} A$.*

Proposition 11. *Soit A une matrice et $\mathbf{b}$ dans $\mathbf{K}^m$ le second membre. L'espace des solutions du système linéaire est un sous-espace affine de direction $\ker A$.*

Exemple 12. *Le système* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ *a pour ensemble de solutions l'espace affine suivant :*

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \tag{6}$$

Proposition 13. *Soit A une matrice et $\mathbf{b} \in \mathbf{K}^m$.*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathbf{b} \in \operatorname{im} A. \tag{7}$$

Proposition 14. *Soit A une matrice et $\mathbf{b} \in \mathbf{K}^m$. Soit $\mathbf{y} \in \mathbf{K}^n$ tel que $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$.*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker A. \tag{8}$$

Proposition 15. *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$.*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}. \tag{9}$$

2 Méthodes directes

2.1 Approche naïve

Proposition 16. *Soit A une matrice inversible.*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{Com} A)^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

Proposition 17 (Formules de Cramer). *Soit A une matrice inversible. Soit $\mathbf{x}$ et $\mathbf{b}$ dans $\mathbf{K}^n$ tels que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Soit i un entier entre 1 et n.*

$$\mathbf{x}_i = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{i-1}, \mathbf{b}, A_{i+1}, \ldots, A_n)}{\det A}. \tag{11}$$

Remarque 18. *Les formules de Cramer nécessitent de l'ordre de $(n+1)!$ additions et $(n+2)!$ multiplications.*

Proposition 19 (Méthode de remontée). *Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure inversible. Soit $\mathbf{x}$ et $\mathbf{b}$ dans $\mathbf{K}^n$ tels que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Soit i dans $[1, n]$.*

$$\mathbf{x}_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_j \right). \tag{12}$$

Proposition 20. *La méthode de remontée nécessite $\frac{n(n-1)}{2}$ additions, $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications et n divisions.*

Exemple 21. *Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a pour solution $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

2.2 Pivot de Gauss

Définition 22. *Une opération élémentaire sur une matrice A est une opération sur ses lignes parmi :*

- **Dilatation** $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *: Les coefficients de la i-ème ligne sont multipliés par un scalaire λ.*
- **Permutation** $L_i \leftrightarrow L_j$ *: La i-ème ligne et la j-ème ligne sont pérmutées.*
- **Transvection** $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ *: Les coefficients de la i-ème ligne sont additionnés de ceux de la j-ème ligne, multipliés par un scalaire λ.*

Remarque 23. *Ces opérations sont aussi définies sur les colonnes.*

Proposition 24. *Les opérations élémentaires sur lignes (resp. colonnes) se traduisent matriciellement.*

- **Dilater** *c'est multiplier à gauche (resp. droite) par $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$*
- **Permuter** *c'est multiplier à gauche (resp. droite) par $P_{ij} = I_n - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$*
- **Translater** *c'est multiplier à gauche (resp. droite) par $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$.*

Proposition 25. *Avec les notations précédentes :*

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{13}$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}. \tag{14}$$

$$T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda). \tag{15}$$

Algorithme 26 (Pivot de Gauss). *Soit A une matrice. Nous définissons $(A^{(k)})_{1\leqslant k\leqslant n}$ de terme initial $A^{(1)} = A$ de manière récursive au rang $(k+1)$:*

- *Si tous les coefficients, sauf éventuellement le premier, de la première colonne sont nuls, l'algorithme est appliqué à la matrice extraite obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne.*
- *Sinon, par échange de lignes, le premier coefficient est rendu non nul, puis on retranche un multiple de la première ligne à chacune des autres lignes de sorte à annuler les autres coefficients de la première colonne.*

Remarque 27. *Le pivot de Gauss consiste à multiplier à gauche par des matrices de transvection et de permutation.*

Proposition 28. *Soit A une matrice et $A^{(n)}$ la matrice obtenue par l'algorithme de Gauss. La matrice $A^{(n)}$ est échelonnée en ligne.*

Corollaire 29. *Pour toute matrice A, il existe une matrice inversible M d'ordre n telle que MA soit échelonnée.*

Exemple 30. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ est échelonnée par le pivot de Gauss en $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Algorithme 31 (Cas inversible). *Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice inversible. Nous définissons $(A^{(k)})_{1\leqslant k\leqslant n}$ de terme initial $A^{(1)} = A$ ainsi que $(P^{(k)})_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ des matrices de permutation et $(E^{(k)})_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ des matrices de transvection par, pour tout k dans $[1, n-1]$:*

$$\tilde{A}^{(k)} = P^{(k)}A^{(k)} \tag{16}$$

$$A^{(k+1)} = E^{(k)}\tilde{A}^{(k)} \tag{17}$$

$$P^{(k)} = \begin{cases} I_n & si\ a_{kk}^{k} \neq 0 \\ I_n & si\ \forall i \geqslant k, a_{ik}^{(k)} = 0 \\ P_{ik} & si\ \exists i \geqslant k+1, a_{ik}^{(k)} \neq 0 \end{cases} \tag{18}$$

$$E^{(k)} = \begin{cases} T_{n,k}\left(-\frac{\tilde{a}_{k+1,k}^{(k)}}{\tilde{a}_{k,k}^{(k)}}\right) \times \cdots \times T_{k+1,k}\left(-\frac{\tilde{a}_{n,k}^{(k)}}{\tilde{a}_{k,k}^{(k)}}\right) & si\ \tilde{a}_{k,k}^{(k)} \neq 0 \\ I_n\ si\ \tilde{a}_{k,k}^{(k)} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Proposition 32. *Le nombre d'additions de l'algorithme de Gauss est dominé par $\frac{n^3}{3}$, le nombre de multiplications est dominé par $\frac{n^3}{3}$ et le nombre de division est dominé par $\frac{n^2}{2}$.*

Exemple 33. *Soit* $A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *La méthode du pivot de Gauss donne en deux étapes :*

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \qquad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

2.3 Du rôle du pivot

Remarque 34. *En pratique, à l'étape* k, *le pivot* $|\tilde{a}_{k,k}^{(k)}|$ *est choisi maximal parmi les coefficients* $(|a_{ik}^{(k)}|)_{k\leqslant i\leqslant n}$ *pour minimiser la propagation d'erreurs numériques.*

Exemple 35. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *La solution est* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1.0001 \\ 0.9999 \end{pmatrix}$.

Si le pivot n'est pas choisi de manière optimale et que les calculs sont arrondis aux trois premiers chiffres significatifs : $A^{(2)}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -9990 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9990 \end{pmatrix}$ *et la solution obtenue est* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Développement 1

Factorisation LU.

Théorème 36. *Soit* A *une matrice telle que ses* n *sous-matrices diagonales* $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ *soient inversibles. Il existe un unique couple* (L,U) *de matrices respectivement triangulaire inférieure avec des* 1 *sur la diagonale et triangulaire supérieure tel que :*

$$A = LU. \tag{21}$$

Factorisation de Cholesky.

Théorème 37. *Soit* A *une matrice symétrique définie positive. Il existe une matrice triangulaire inférieure* B *telle que :*

$$A = BB^{\mathrm{T}}. \tag{22}$$

Exemple 38.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

3 Méthodes itératives

3.1 Analyse matricielle

3.1.1 Rayon spectral

Définition 39. *Une norme* $\|\cdot\|$ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *est dite matricielle si pour toutes matrices* A *et* B : $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

Proposition 40. *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathbf{K}^n$. *Soit* A *une matrice. La quantité suivante définit une norme matricielle sur* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, *dite subordonnée.*

$$|||A||| = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbf{K}^n \\ \mathbf{x}\neq 0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \tag{24}$$

Définition 41. *Le rayon spectral d'une matrice est le maximum de ses valeurs propres en module. Il est noté* ρ.

Théorème 42. *Soit* A *une matrice et* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

$$\rho(A) \leqslant \|A\|. \tag{25}$$

Théorème 43. *Soit* A *une matrice et* $\|\cdot\|$ *une norme matricielle. Il y a équivalence.*

1. $\lim A^k = 0$.
2. $\forall \mathbf{x}\in\mathbf{K}^n, \lim A^k\mathbf{x} = 0$.
3. $\rho(A) < 1$.
4. *Il existe une norme subordonnée* $|||\cdot|||$ *telle que* $|||A||| < 1$.

Théorème 44. *Soit* A *une matrice et* $\|\cdot\|$ *une norme matricielle.*

$$\lim \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A). \tag{26}$$

3.1.2 Conditionnement

Définition 45. *Étant fixée une norme subordonnée* $|||\cdot|||$, *le conditionnement d'une matrice inversible* A *est la quantité suivante.*

$$\operatorname{cond} A = |||A|||\,|||A^{-1}|||. \tag{27}$$

Proposition 46. *Le conditionnement d'une matrice est supérieur ou égal à* 1.

Proposition 47. *Soit* A *une matrice inversible. Soit* $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{b}$ *et* $\mathbf{x}'$ *dans* $\mathbf{K}^n$ *non nuls tels que* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *et* $A\mathbf{x}' = \mathbf{b}'$.

$$\frac{\|\mathbf{x}'\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\mathbf{b}'\|}{\|\mathbf{b}\|}. \tag{28}$$

Remarque 48. *Des perturbations sur le système linéaire entraînent une perturbation des solutions contrôlée par le conditionnement.*

Exemple 49. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$, *soit* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}$

Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *a pour solution le vecteur* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ *tandis que le système* $A\mathbf{x}' = \mathbf{b}'$ *a pour solution le vecteur* $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 9.2 & -12.6 & 4.5 & -1.1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

3.2 Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation

Désormais, A est une matrice inversible, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs tels que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Définition 50. *Une matrice de méthode itérative est une matrice* B *telle qu'il existe un vecteur associé* $\mathbf{c}$ *tel que* $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$.

Algorithme 51. *Soit* B *une matrice de méthode itérative et* $\mathbf{c}$ *le vecteur associé. Soit* $\mathbf{x}_0$ *dans* $\mathbf{K}^n$. *La méthode itérative est la suite* $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *définie pour tout entier* k *par :*

$$\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + c. \tag{29}$$

Théorème 52. *Une méthode itérative converge si, et seulement si, la matrice de la méthode itérative est de rayon spectral strictement inférieur à* 1.

Remarque 53. *La convergence ne dépend pas du vecteur initial.*

Proposition 54. *Soit* M *une matrice inversible et* $N = M - A$. *La matrice* $M^{-1}N$ *est une matrice de méthode itérative associée au vecteur* $M^{-1}\mathbf{b}$.

Proposition 55 (Méthode de Jacobi)**.** *Si* A *a tous ses coefficients diagonaux non nuls. Soit* $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. *Soit* E *l'opposé de la partie triangulaire inférieure stricte de* A. *Soit* F *l'opposé de la partie triangulaire supérieure stricte de* A. *De telle sorte que* $A = D - E - F$.

Soit $J = D^{-1}(E + F)$. *La matrice* J *est une matrice de méthode itérative associée au vecteur* $D^{-1}\mathbf{b}$.

Proposition 56 (Méthode de Gauss-Seidel)**.** *Soit* $L_1 = (D - E)^{-1}F$. *La matrice* L_1 *est une matrice de méthode itérative associée au vecteur* $(D - E)^{-1}\mathbf{b}$.

Proposition 57 (Méthode de relaxation)**.** *Soit* ω *un réel non nul. Soit* $L_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$. *La matrice* L_ω *est une matrice de méthode itérative associée au vecteur* $\mathbf{b}$.

Développement 2

Lemme 58. *Soit* A *une matrice hermitienne définie positive. Soit* M *une matrice inversible et* $N = M - A$. *Si* $M^* + N$ *est (hermitienne) définie positive, alors* $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Théorème 59 (Ostrowski-Reich)**.** *Soit* A *hermitienne définie positive à coefficients diagonaux non nuls. La méthode de relaxation converge si* $0 < \omega < 2$.

Proposition 60. *Soit* ω *non nul.*

$$\rho(L_\omega) \geqslant |\omega - 1|. \tag{30}$$

Références

[Cia24] Philippe Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Cours et exercices corrigés.* 5e éd. Sciences Sup. Dunod, mai 2024. 296 p. ISBN : 9782100874422. URL : `https://www.dunod.com/sciences-techninques/introduction-analyse-numerique-matricielle-et-optimisation-0`.

[Man19] Roger Mansuy. *Mathématiques MPSI. Tout-en-un.* 1re éd. Prépas Scientifiques. Vuibert, mai 2019. 1003 p. ISBN : 9782311406757.