154

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre : K corps, E K-espace vectoriel de dimension finie

I. Généralités et exemples

1. Définitions [Man p. 15]

Déf 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E. On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$

Ex 2 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont stables par f.

Prop 3 : Si F est stable par $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors F est stable par $f+g$ et $f \circ g$.

Prop 4 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \in GL(E)$ et F est stable par f, alors $g(F)$ est stable par $g \circ f \circ g^{-1}$

Ex 5 : Si g est une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe Δ et f une isométrie, alors $f \circ g \circ f^{-1}$ est une rotation d'axe $f(\Delta)$.

Remarque 6 : Si $E = F \oplus G$ où F, G sont stables par f et B_1, B_2 sont des bases respectives de F et G, ~~et~~ $B = B_1 \cup B_2$, alors $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{B_1}(f_F) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}_{B_2}(f_G) \end{pmatrix}$

Notation 7 : Si F est stable par f, l'induit de f sur F est $f_F : F \to F$

Prop 8 : Si F est stable par f, $\Pi_{f_F} \mid \Pi_f$ et $\chi_{f_F} \mid \chi_f$

Prop 9 : Si $E = F \oplus G$, F, G stables par f alors $\Pi_f = \mathrm{ppcm}(\Pi_{f_F}, \Pi_{f_G})$.

2. Exemples de sous-espaces stables [Man p. 16]

Ex 10 : Si f est une homothétie, tout sev est stable par f

Prop 11 : Soit p projecteur, $F \subset E$ est stable par p ssi il est la somme directe d'un sous-espace de $\mathrm{Im}\, p$ et d'un sous-espace de $\mathrm{Ker}\, p$

Ex 12 : Si s est une symétrie, F est stable par s ssi il est la somme directe d'un sous-espace de $\mathrm{Ker}(s-id)$ et d'un sous-espace de $\mathrm{Ker}(s+id)$

Ex 13 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les sous espaces stables par $\varphi : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)$, $M \mapsto tr(AM) I_n$ sont ceux qui contiennent I_n ou sont inclus dans $H = \{M \,/\, tr(AM) = 0\}$.

Prop 14 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $n = \dim E$. Les sous-espaces stables par f sont les $\mathrm{Ker}\, f^k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Déf 15 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$. Le sous-espace cyclique de f associé à x est le plus petit sev stable par f contenant x. On le note $E_{f,x}$.

Prop 16 : $E_{f,x} = \mathrm{Vect}(f^k(x), k \in \mathbb{N})$.

Prop 17 : $\dim E_{f,x} = \deg \Pi_{f,x}$ où $\Pi_{f,x}$ est l'unique générateur unitaire de ~~noyau de~~ $\{P \in K[X] \,/\, P(f)(x) = 0\}$ idéal de $K[X]$.

3. Fabriquer des sev stables : le lemme des noyaux [OA] [Gou]

Thm 18 [OA 165] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \ldots, P_k \in K[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors $\mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)(f)\right) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, P_i(f)$

Application 19 : Il existe $x \in E$: $\Pi_{f,x} = \Pi_f$. [OA 165]

Appli 20 : Si F est stable par f et $\Pi_f = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$, alors $F = \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathrm{Ker}\, P_i^{\alpha_i}(f) \cap F)$

Déf 21 : Si χ_f est scindé sur K, $\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, on appelle $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$ sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i. [Gou 191]

Prop 22 : E est somme directe des N_i, $\dim N_i = \alpha_i$ et N_i est stable par f

Thm 23 [Gou 164] Si $f \in \mathcal{L}(E)$, f est diagonalisable ssi χ_f est scindé sur K et pour toute racine λ_i de multiplicité α_i, $\alpha_i = \dim E_{\lambda_i}$

Cor 24 : Si Π_f est scindé à racines simples, f est diagonalisable.

Thm 25 [Gou] $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi χ_f est scindé sur K

Remarque 26 [OA 166] Si u est diagonalisable/trigonalisable et F est stable par u, alors u_F est diagonalisable/trigonalisable.

Thm 27 [Gou 193] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé sur K. Il existe un unique couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotent et $f = d + n$, $n \circ d = d \circ n$

Appli 28 : Si $f = d + n$ comme dans le théorème, $\exp(f) = \exp(d) \circ \exp(n)$ et il est facile de calculer l'exponentielle d'un diagonalisable/nilpotent

Ex 29 : f est diagonalisable $\Leftrightarrow \exp(f)$ est diagonalisable (si Π_f est scindé)

4. Supplémentaires stables et dualité.

[Gou 130]

Prop 30 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $F \subset E$ est stable par $u \Leftrightarrow F^{\perp}$ est stable par ${}^t u$.

où $F^\perp = \{\varphi \in E^* \,/\, \varphi_{|F} = 0\}$ est l'orthogonal au sens de la dualité.

Application 31. Si $x \in E^*$ est un vecteur propre de ${}^t u$, alors $(Kx)^\circ = \{y \in E \,/\, \forall \varphi \in (Kx), \varphi(y) = 0\}$ est un hyperplan de E stable par u.

II. Stabilité et commutation.

1. Comportement vis à vis des sous-espaces stables

Prop 32 [OA 159] Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u\circ v = v \circ u$. Alors $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont stables par v — ou [Man 26]

Ex 33, ~~Si K est algébriquement clos~~, les seuls endomorphismes commutant avec tous les éléments de $GL(E)$ sont les homothéties [Man 26]

Ex 34 : Si p est un projecteur, p commute avec $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi $\ker(p - id)$ et $\ker(p)$ sont stables par u. [Man 30]

2. Réductions simultanées [Gou]

Thm 35 [Gou 171] Soit $(f_i)_{i\in I}$ famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux. Alors si $\forall i \in I$, f_i est diagonalisable (resp. trigonalisable), il existe une base B de E telle que $\forall i \in I$ $\mathrm{Mat}_B(f_i)$ est diagonale (resp. triangulaire)

Ex 36 [Man 85] Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables, $M \mapsto AMB$ est diagonalisable.

Ex 37 [OA 168] Si $f\circ g = g \circ f$ et f, g diagonalisables, alors $f+g$ est diagonalisable.

Appli 38 [OA 205] Si $\mathrm{car}(K) \neq 2$, $GL_n(K) \simeq GL_m(K) \Longleftrightarrow n = m$

Appli 39 [OA 206] Si K est algébriquement clos et G sous-groupe abélien d'ordre n de $GL_m(K)$. Si $n \wedge \mathrm{car}(K) = 1$, G est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales.

3. Endomorphismes normaux.

Ici, $K = \mathbb{R}$, E est euclidien

Def 40 [Gou 258] $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u\circ u^* = u^* \circ u$ où u^* est l'adjoint de u : $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$ $\forall x, y \in E$.

Lemme 41 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F est stable par $u \Longleftrightarrow F^\perp$ est stable par u^*.

Remarque 42 : si u est normal, F stable par $u \Longrightarrow F^\perp$ stable par u.

Théorème 43 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2

Théorème 44 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal, il existe une base orthogonale B de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & A_1 & \\ 0 & & & & \ddots \; A_s \end{pmatrix}$ où $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$

Application 45 : • Si $u \in O_n(\mathbb{R})$, il existe B orthogonale telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & 0 \\ & \ddots \; \varepsilon_r & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ 0 & & & \ddots & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$ où $\varepsilon_i = \pm 1$ et $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

• Si $u^* = -u$, $\exists B$ telle que $\mathrm{Mat}_B(u)$ soit diagonale à coefficients dans $\mathbb{R}$.

• théorème spectral pour les endomorphismes symétriques.

Appli 46 : u est normal $\Longleftrightarrow u^* \in \mathbb{R}[u]$ [dSP 196]

Appli 47 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$ sont $SO_n(\mathbb{R})$ et $\{M \in O_n(\mathbb{R}) \,/\, \det M = -1\}$. [dSP 193]

Appli 48 : $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective [FGNAl3, 65].

III. Stabilité et cyclicité

1. Théorème de Jordan. [Gou], [H2G2]

Soit A nilpotente, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Lemme 49 : $K_i = \mathrm{Ker}\, A^i$ est un sev stable par A. On note $k_i = \dim \mathrm{Ker}\, A^i$

Prop 50 : La suite $\lambda_i = k_i - k_{i-1}$ vérifie $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $0 \leq \lambda_{i+1} \leq \lambda_i$

Théorème 51 (Jordan) A est semblable à $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$ où $J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$, les blocs de taille k sont en nombre $\lambda_k - \lambda_{k+1}$. La classe de similitude de A est caractérisée par la suite (λ_i) [H2G2 92]

Remarque 52 : On établit la réduction de Jordan de A en écrivant le tableau de Young associé à (λ_i), voir annexe.

Appli 53 : A et ${}^t A$ sont semblables (pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque)

2. Réduction de Frobenius [Gou p289]

Déf 54 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique* s'il existe $x \in E$ tel que $E_{u,x} = E$.

Prop 55 : u est cyclique ssi $\chi_u = \pi_u$ ~~ssi~~ ssi $Mat_B(u) = C_P$ pour $P \in K[X]$ dans une bonne base

DVP 1

Thm 56 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une unique famille de polynômes $P_1 | \dots | P_r$ et $E_1, \dots, E_r$ sev de E tels que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ et $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, E_i est stable par u et u_{E_i} est cyclique de polynôme minimal P_i. Les P_i sont les invariants de similitude de u

Corollaire 57 : Il existe une base B telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_r} \end{pmatrix}$

Corollaire 58 : u et v sont semblables $\Leftrightarrow$ ils ont mêmes invariants de similitude

Remarque 59 : on retrouve la décomposition de Jordan.

Remarque 60 : les invariants de similitude se retrouvent avec le théorème des facteurs invariants de Smith appliqué à $C_P - XI$.

IV. À la recherche d'un supplémentaire stable.

1. Stabilité et K[X]-modules [OA p 269]

Prop 61 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on munit E d'une structure de $K[X]$-module en posant $P \cdot x = P(u)(x)$. On note (E,u) cette structure. Alors :

- Un morphisme $\varphi : (E,u) \to (F,v)$ est un $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi \circ u = v \circ \varphi$
- $(E,u) \simeq (F,v)$ en tant que $K[X]$-modules ssi u et v sont semblables.
- Les sous-$K[X]$-modules de (E,u) sont les sev stables par u.
- Une somme directe de sous-espaces stables est une somme directe au sens des $K[X]$-modules.

2. Semi-simplicité. [Gou] [OA]

Déf 62 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *semi-simple* si tout sev stable par u admet un supplémentaire stable

DVP 2

Théorème 63 : u est semi-simple ssi son polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles distincts.

Ex 64 : Si K est algébriquement clos, u est semi-simple ssi il est diagonalisable.

Prop 65 : Si car $K = 0$, u est semi-simple $\Leftrightarrow$ Il existe une extension de K (E dim K) dans laquelle M est diagonalisable

Remarque 66 : u est semi-simple $\Leftrightarrow$ (E,u) est un $K[X]$-module semi-simple

V. Applications en théorie des représentations. [Col]

G fini

Déf 67 : Une représentation du groupe G est un morphisme $\rho : G \to GL(V)$ où V K-espace vectoriel de dimension finie. [235]

Ex 68 : La représentation de permutation de G est $\rho(g) : e_h \mapsto e_{gh}$ où $V = Vect(e_h, h \in G)$ [239]

Déf 69 : Une sous-représentation de (V, ρ) est un sev de V stable par $\rho(g)$ $\forall g \in G$. On dit que (V, ρ) est *irréductible* s'il n'admet pas de sous-représentation non triviale [242]

Prop 70 : Soit (V, ρ) représentation de G. Il existe un produit-scalaire sur V, $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, tel que $\forall g \in G, \forall v_i \in V$, $\langle \rho(g)(v_1), \rho(g)(v_2) \rangle_V = \langle v_1, v_2 \rangle_V$

Thm 71 (Maschke) Toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles [244]

Remarque 72 : Si $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$, le nombre de W_i isomorphes en tant que représentation à W irréductible ne dépend pas de la décomposition en irréductibles de V choisie. [248]

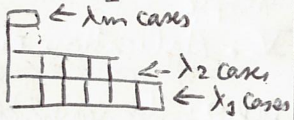
Ex 73 : Si G est abélien, les représentations irréductibles sont de dimension 1

Prop 74 [Ulmer] Soit G groupe fini de caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_m$. Les sous-groupes distingués de G sont les $\bigcap_{j \in J} Ker\, \chi_j$ où $J \subset [\![1, m]\!]$, avec $Ker\, \chi_i = \{g \in G / \chi(g) = \chi(e)\}$

Annexe [H2G2]

Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ une suite décroissante d'entiers tels que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = n$.

Le diagramme de Young associé à λ est $Y(\lambda)$:

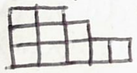


Le diagramme dual Y^* est celui obtenu en ~~faisant~~ intervertissant lignes et colonnes.

Si (λ_i) est la suite définie dans les propositions 50, $Y^*(\lambda)$ détermine le nombre et la taille des blocs de Jordan.

Ex : $A \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice de nilpotence 3, $k_1 = 5$, $k_2 = 8$.

Donc $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$.



$Y(\lambda)$;

$Y^*(\lambda)$

La réduction de Jordan de A est $\begin{pmatrix} J_3 & & & & 0 \\ & J_3 & & & \\ & & J_2 & & \\ & & & J_1 & \\ 0 & & & & J_1 \end{pmatrix}$

Références

- [Gou] : X. Gourdon, Algèbre, 2ème édition
- [OA] : V. Beck, J. Malick, G. Peyré, Objectif Agrégation
- [Man] : R. Mansuy, R. Mneimné, Réduction des endomorphismes
- [Col] : P. Colmez, Éléments d'analyse et d'algèbre
- [FGNAl3] : Francinou-Gianella, Oraux X-ENS : Algèbre 3
- [H2G2] : Caldero, Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, T. 1.
- [dSP] : C. de Seguins-Pazzis, Invitation aux formes quadratiques