Déf 4 p229 : φ sesquilinéaire sur $\mathbb{C}$

φ de sym. hermitienne si $\varphi(x;y) = \overline{\varphi(y;x)}$

$M = Mat_B(\varphi)$ $\quad M = {}^t\overline{M} = \underbrace{S}_{\text{sym}} + i\underbrace{A}_{\text{anti-sym}}$

Notation (p231)

$M^* =$ transposée de M

si on est dans $\mathbb{C}$, $M^* = {}^t\overline{M}$

on a alors $\forall \varphi$, hermitienne ou bilinéaire sym

$\varphi(x;y) = (X^*)AY$

I Formes quadratiques : matrices sym. et hermitiennes

1) Formes quad et produit scalaire + adjoint + mat de Gram

2) Matrices sym et hermitiennes

II Orthogonalité + réd. de Gauss + b.o.n.

Gourdon Grifone

III Cas particulier des mat. sym réelles :

1) Dimension + thm spectral

2) Décomp. $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ / $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, structure de $S_n^+(\mathbb{R})$,

3) Réduction d'$A \in S_n(\mathbb{R})$, racines carrée de $A \in S_n(\mathbb{R})$

décomposition polaire, rayon spectral

Application : méthode de Jacobi ?

I. Formes bilin sym + hermi

1) Produit scalaire / hermitien

2) Représentation matricielle (Gram)

3) Endo remarquables (auto-adj, ...)

II. Orthogonalité et réduction :

1) Réd. Gauss / loi de Sylvester

2) Gram-Schmidt et b.o.n.

3) thm spectral / réd. simultanée.

III. Cas des matrices sym réelles :

1) Structure de $S_n^+(\mathbb{R})$

2) Décomposition polaire

I) Matrices symétriques et hermitiennes :

1) Déf et propriétés

2) Lien avec les formes bilinéaires symétriq et hermitiennes

II) Orthogonalité et réduction :

1) Bases orthonormées / Gram-Schmidt

(2) Réd des formes quadratiques) optionnel

3) Thm spectral et réduction simultanée

4) Cas des matrices symétriques réelles

III. Application :

1) Calcul différentiel

2) Recherche de valeurs propres

(3) Vecteurs gaussiens) plutôt non

4) Formes réduites de quadriques (P391 du Grifone + un peu Rouvière)

Développements possibles :

- Matrices & dét de Gram
- Sylvester [Gourdon] → 149, 171, 157, 170
- Thm spectral : P244 Gourdon $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et q sur E alors $\exists$ une b.o.n. de E $\perp$ pour q.

  + thm spectral [Gourdon]

149, 151, 155, 158, 154, 153?
↳ + peut être étendu à l'étude d'extrema.

- Décomposition polaire : 106, 152, 154, 157 ~ 158 ? [Romb]
- Lemme de Morse [Rouvière] (ex 114 P354 + 66 P209)

  ↳ se recase plutôt bien (171, 214, 215, 218, 220)

  mais ça a l'air plutôt analyse.