Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I - Généralités et premières applications [1] [3] [4] [5]

1 - Cas de la dimension 1

Théo 1 (Taylor-Young)**.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $a \in I$ tel que $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors lorsque $h \to 0$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + ... + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

NB 2. Cette formule est la base de la théorie des développements limités.

App 3 (Théorème de Darboux)**.** [TY] Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I.
Alors $f'(I)$ est un intervalle.

NB 4. Ce théorème peut être utilisé pour montrer que certaines fonctions n'admettent pas de primitive.

Théo 5 (Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a;b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a;b[$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{\textit{reste de Lagrange}}.$$

Théo 6 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a;b]$, $(n+1)$-dérivable sur $]a;b[$. S'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \in]a;b[, ||F^{(n+1)}(t)|| \leq M$ alors*

$$\left|\left|F(b) - F(a) - (b-a)F'(a) - ... - \frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)\right|\right| \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théo 7 (Taylor avec reste intégral)**.** *Soit $F : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a;b]$. Alors,*

$$F(b) = F(a)+(b-a)F'(a)+...+\frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}F^{(n+1)}(t)dt.$$

2 - En dimension supérieure ou égale à 2

Théo 8 (Taylor-Young)**.** *Si $f : U \longmapsto \mathbb{R}^p$ (U est un ouvert de $\mathbb{R}^q$) une fonction n fois différentiable en $x \in U$. On a alors, pour $||h||$ tend vers 0,*

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)h^\alpha + o(||h||^n).$$

App 9 (TY)**.** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Supposons qu'il existe $a \in U$ tel que $df_a = 0$ alors

(i) Si f admet en a un minimum local (resp. maximum) alors $d_a^2 f$ est une forme quadratique positive (resp. négative).

(ii) Si $d_a^2 f$ est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative) alors f admet en a un minimum (resp. maximum) local strict.

Théo 10 (Taylor avec reste intégral)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^q$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une fonction de $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit $x, y \in U$ et supposons que le segment qui les joint soit contenu dans U. On a alors*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(y)(x-y)^\alpha \\ &+ \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{n+1}{\alpha!}(x-y)^\alpha \int_0^1 (1-t)^n \partial^\alpha f(tx+(1-t)y)dt. \end{aligned}$$

App 11 (Lemme de Hadamard)**.** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ définie dans $\mathbb{R}^q$ et s'annulant en 0. Il existe des fonctions $g_1, ..., g_q$ dans $\mathcal{C}^n$ telles que l'on ait $f(x) = \sum_{i=1}^q x_i g_i(x)$ pour tout $x = (x_1, ..., x_q) \in \mathbb{R}^q$.

NB 12. La formule et l'inégalité de Taylor-Lagrange se retrouvent en appliquant Taylor en dimension 1 à la fonction $t \mapsto g(t) = f(x_0+t(x-x_0))$

Cor 13 (Taylor pour les polynômes)**.** Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ de degré inférieur ou égal à n et soit $a \in \mathbb{C}$, alors, pour $||h||$ tend vers 0,

$$P(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha P(x) h^\alpha.$$

App 14. Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ un polynôme non nul. Alors

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\} \text{ est d'intérieur vide.}$$

II - Applications

1 - Etude de l'analyticité [4]

Déf 15. Une fonction est *analytique* sur I ouvert de $\mathbb{R}$ si elle est développable en série entière au voisinage de tout point $x_0 \in I$.

Théo 16. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ (avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$). Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est analytique sur Ω

(ii) Pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe $C_K > 0$ tel que

$$\sup_{x \in K} \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} C_K^{-|\alpha|} \, |\partial^\alpha f(x)| < \infty$$

Prop 17 (Lemme de Bernstein)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \geq 0$ pour $x \in I$. Alors f est analytique sur I. Plus précisément, pour tout $x_0 \in I$, la série de Taylor de f en x_0 converge vers f sur tout intervalle ouvert centré en x_0 et contenu dans I.*

2 - Méthode de Newton [2] [5]

Théo 18 (**Développement 1**)**.** *Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose $c < d, f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; x_{n+1} = \phi(x_n) \text{ avec } \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alors en notant a l'unique valeur d'annulation de la fonction f, on a :

(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha] = I$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a,

$$| \, x_{n+1} - a \, | \leq C | \, x_n - a \, |^2$$

(ii) Si, de plus, pour tout $x \in [a,d], f''(x) > 0$ alors pour tout $x_0 \in [a,d]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \\ x_{n+1} - a \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ pour } x_0 > a. \end{cases}$$

Ex 19. On peut approcher le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en considérant la fonction $f(x) = x^2 - x - 1$ sur [1,2].

3 - Théorème central limite

Déf 20. On dit que X_n converge en loi vers X si pour tout fonction f continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)]$ converge vers $\mathbb{E}[f(X)]$.

Théo 21 (**Développement 2**)**.** *Soit X_n une suite de variables iid à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant un moment d'ordre 2. Notons :*

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \right].$$

Alors Y_n converge en loi vers la loi normale centrée en 0 et de variance $Var(X_1)$.

Références

[1] Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse*. Les éditions de l'école polytechnique, 2001.

[2] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Analyse*. Ellipses, 2008.

[4] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.

[5] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel*. Cassini, 2003.