234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgues intégrables

↳ étude et utilisation des espaces L^1 (voire L^p) associés à la mesure de Lebesgue (supposée construite).

→ Fubini, permutation limite intégrale → incontournables + ex et applications significatives.

↳ aller piocher dans les thèmes d'approximation

→ Mesure de Lebesgue déjà construite.

Références : [Briane Pagès] [Gallouet Kurtzmann]

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré

I) Intégrabilité, espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$

1) Intégrale de f$^{\circ}$ mesurables positives

Déf O : intégrale d'une fonction étagée [BP 120]

Thm O : Thm fond d'approx [BP 75]

Déf O : intégrale d'une fonction mesurable ≥ 0 [BP 122]

Thm O : théorème de convergence monotone [BP 124]

Appli O : [BP 133 7.1] $\int (1-\frac{x}{n})^n$

Prop O : propriétés de l'intégrale [BP 125 7.3]

Prop O : intégrale nulle [BP 125 7.2]

Coro O : $f=g$ μpp $\int f = \int g$ [BP 126 7.1]

2) Espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$

Déf O : f$^{\circ}$ intégrable [BP 128 7.3] + $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$

Ex O : $\ell^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) = \{(a_n) \mid \sum |a_n| < +\infty\}$

Déf O : intégrales de f$^{\circ}$ à val dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Thm O : linéarité et croissance et positivité de $\int$ [BP 129 7.2]

Prop O : Inégalité $|\int f| \leq \int |f|$

Thm O : Fubini O App : série double

II) Thm de convergence et int. à paramètre

1) Thm de cvge

Thm O : Lemme de Fatou [BP 137]

App O : lim d'une suite de f$^{\circ}$ $\int$ CVS tq $\int |f_n| < +\infty$

App O : Intégration de la dérivée f$^{\circ}$ ↗

Thm 0 : convergence dominée [BP 140]

App 0 : $f_n : x \mapsto \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}} ; n\right)$ $x \in [0;1]$. [BP 140]

App 0 : $\int$ de f' avec cvgce dominée

App 0 : Exo 8.8 P 154 BP $\sum_{n \geq 0} (-x)^n$ en déduire $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

App 0 : $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ str $\nearrow$ tq $f(0) = 0$, $f(1) = 1$
$\lim \int_0^1 f(t)^n dt = 0$ [Gou 162 (2e ed)]

Thm 0 : $\int \sum f_n = \sum \int f_n$ [BP 143]

2) Intégrale à paramètres - transfo de F :

Thm 0 : continuité sous $\int$ [BP 145]

Thm 0 : dérivabilité sous $\int$ [BP 147]

App 0 : étude $t \mapsto \int \sqrt{\varphi(x)^2 + t}$

Déf 0 : déf de la transformée de Fourier. [BP 149]
$\oplus$ déf convolution

Thm 0 : Riemann-Lebesgue

Thm 0 : $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}^0$ $\mathcal{C}^0$ et inj et linéaire

App : transfo. de Fourier d'une Gaussienne.

DVT ?

III) Espaces $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

1) Espaces $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$:

Déf 0 : $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ [BP 163]

Ex 0 : $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) = ((a_n) \mid \sum |a_n|^p < +\infty)$

Prop 0 : • si $\mu(X) < +\infty$ $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$ $0 < p \leq q$

• $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$ [BP 164]

Thm 0 : Hölder [BP 165] + déf exposants conjugués

Corollaire 0 : "C.S" [BP 166]

Thm 0 : inégalité de Minkowski [BP 167]

2) Espaces $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$:

Déf 0 : semi-norme

Ex 0 : $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p}$ semi-norme

Déf 0 : noyau d'une semi-norme

Déf 0 : $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ + norme

DVT 1

Prop 0 : Minkowski généralité

Prop 0 : E complet ssi série abs cv . cv

Théorème 0 : Riesz-Fischer [BP 172]

Thm 0 : convergence L^p-dominée [BP 174]

Prop 0 : densité f^e étagées

Thm 0 : densité f^e $\mathcal{C}^0$ à support compact [admis]

App 0

3) L'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{K}}(\mu, \rho)$

Prop 0 : $(L^2_{\mathbb{K}}(\mu) ; \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ est un Hilbert $\langle \cdot ; \cdot \rangle = \dots$

Déf 0 : approx identité

Déf 0 : f^e poids et $L^2(I, \rho)$

Thm 0 : densité des pol. orthogonaux

DVT2