

L262 - Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.

I. Variables aléatoires réelles :

1. Définitions :

[GK 117] [D 429] Définition 1: on appelle variable (resp. vecteur) aléatoire réelle toute application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (resp. $(\mathbb{R}^d; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$). C'est-à-dire que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Définition 2: on appelle loi de X la mesure image de P par X , que l'on note P_X . $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$.

On note $P(X \in A)$ ou $P(X = a)$ au lieu de $P_X(A)$ et $P_X(\{a\})$.

Exemple: loi uniforme continue et discrète, loi de poisson, loi binomiale, loi normale, etc. cf. annexe

[GK 118] Définition 3: on appelle fonction de répartition de X et on note F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P_X(-\infty; t] = P(X \leq t)$

Théorème 4: Si deux v.a.r. ont la même fonction de répartition alors elles ont la même loi

[GK 159] Définition: Si X est intégrable on appelle espérance de X et on note $E[X]$ le réel défini par:

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) \stackrel{T.T}{=} \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x) \quad \left[\begin{array}{l} \text{T.T: thm} \\ \text{de transfert} \end{array} \right]$$

Définition : si X est de carré intégrable on appelle variance de X le réel $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$.

Exemples : l'espérance et la variance des lois usuelles sont données en annexes.

2) Résultats généraux :

Proposition : [Inégalité de Markov] Soit X une variable aléatoire positive, intégrable. Alors on a

$$\forall a > 0, a P(X \geq a) \leq E[X]$$

Proposition : [Inégalité de Chebychev] Soit X une v.a.r. de carré intégrable $\forall a > 0, P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{V[X]}{a^2}$.

II. Modes de convergence d'une suite de v.a.r.

1) Convergence presque sûre et en probabilité

Définition : on dit qu'une suite de v.a.r. $(X_n)_n$ converge dans L^p (avec $p \geq 1$) vers une v.a.r. X si $E[|X_n - X|^p] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
on écrit $X_n \xrightarrow{L^p} X$

Proposition : soit $p \geq q \geq 1$. si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors $X_n \xrightarrow{L^q} X$

Définition : on dit qu'une suite de v.a.r. $(X_n)_{n \geq 0}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ converge presque sûrement vers une v.a.r. X si : $P(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1$.
on écrit $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Exemple : $X_n : [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 $\omega \mapsto \omega^n$

P est la probabilité uniforme sur $[-1; 1]$. $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$

Théorème : Soit (X_n) une suite de v.a.r., $M \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$1. \forall a > M \quad P(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \{X_n \geq a\}}) = 1$$

$$2. \forall a < M \quad P(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \{X_n \geq a\}}) = 0 \quad \text{Alors } \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} X_n = M \text{ p.s.}$$

Théorème : [Critère fondamental de convergence p.s.]

→ d'ut avec Jensen + Lyapounov.

[GK]
[172]

[D]
[464]

[GK]
[265]

[D]
[465]

[GK]
[267]

La suite de v.a.r $(X_n)_{n \geq 0}$ converge p.s vers la v.a.r X si $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0$

Proposition : Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$ alors

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad aX_n \xrightarrow{p.s.} aY_n; \quad X_n + Y_n \xrightarrow{p.s.} X + Y; \quad X_n Y_n \xrightarrow{p.s.} XY.$$

Si $(X_n)_n$ et X sont à valeurs dans une partie E de $\mathbb{R}$ alors pour toute fonction f continue définie sur E
 $f(X_n) \xrightarrow{p.s.} f(X).$

Définition : la suite de v.a.r $(X_n)_n$ converge en

probabilité vers X si $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

on écrit $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Exemple : Soit (X_n) une suite de v.a.r telle que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n}. \text{ Alors } X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Proposition : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ alors

$$(X_n; Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X; Y); \quad X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$$

Théorème : [Lemme de Borel-Cantelli 1] Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements. Si la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge alors $\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 0$.

Théorème : [Lemme de Borel-Cantelli 2] Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements indépendants. Si la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 1$.

Exercice : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, on ait

$$\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}. \text{ On pose } S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Montrer que $\frac{S_n}{n^{3/2}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et $\frac{S_n}{n^3} \xrightarrow{p.s.} 0$

2) Convergence en loi:

Définition : on dit que $(\mu_n)_n$, une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ converge faiblement vers la mesure de probabilité μ lorsque pour toute fonction f continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

Définition : on dit qu'une suite de v.a.r. $(X_n)_n$ converge en loi vers une v.a.r. X si la suite des mesures (μ_{X_n}) converge faiblement vers μ_X .

On écrit $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ou $X_n \Rightarrow X$.

Exemple : Soit une suite de v.a.r. $(X_n)_{n \geq 1}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu(X_n = \frac{1}{n}) = 1 \text{ et } X \text{ tq } \mu(X=0)=0 \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

Proposition : si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors pour toute fonction continue bornée $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X)]$

Proposition : Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$

Corollaire : Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de v.a.r.

si $(X_n, Y_n)_n \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y)$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$
et $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} XY$

Théorème : (Lévy) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. On

a équivalence entre

1) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

2) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{X_n}(t) = \phi_X(t)$

"notion de fonction caractéristique"

où pour une v.a. Y
 $\phi_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto \mathbb{E}[e^{itY}]$

Application : Soit $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{U}([1; n-1])$. Alors

$$X_n/n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{U}([0; 1]).$$

[GK]
294

[D]
474

[GK]
295
296

[GK]
306

[GK]
313

[G 302] Théorème : Soit (X_n) une suite de v.a.r. et X une v.a.r. de fonction de répartition F_X DVT 110

[D 474] Proposition : on considère (X_n) une suite de v.a.r. et X une v.a.r., toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors
 $(X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X)$ ssi $(\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k))$

3. Liens entre les modes de convergence :

[GK 268] Proposition : La convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.

Contre-exemple : $L^p \not\Rightarrow L^1$. $(X_n)_n$ tq $\forall n \geq 1, P(X_n = n) = n^{-p}$
 $P(X_n = 0) = 1 - n^{-p}$. $X_n \xrightarrow{P} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{L^1} 0$.

Proposition : La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

Contre-exemple : $L^p \not\Rightarrow$ p.s. : $(X_n)_n$ tq $\forall n \geq 1, X_n \sim B(\frac{1}{n})$
Alors $X_n \xrightarrow{P} 0$, $X_n \not\xrightarrow{p.s.} 0$.

[GK 274] Théorème : Soit $(X_n)_n$ une suite de var. $X_n \xrightarrow{P} X$. Alors il existe une sous-suite $(X_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $X_{n_k} \xrightarrow[p.s.]{k \rightarrow +\infty} X$.

Corollaire : si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si f est une fonction continue, alors $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

[GK 304] Théorème : si $X_n \xrightarrow{P} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$ ou $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \delta_a$, a constante, $X_n \xrightarrow{P} a$

Contre-exemple : $\mathcal{L} \not\Rightarrow P$. $(X_n)_n$ tq $X_n \sim B(p)$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} B(p)$ mais $X_n \not\xrightarrow{P} B(p)$.

III. Applications et théorèmes majeurs :

1) Loi des grands nombres :

Théorème : [loi faible des grands nombres]

Soit $(X_n)_n$ une suite de var. de carré intégrable

deux-à-deux non corrélées (i.e. $E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=0$)

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad M_n = \frac{S_n}{n} \text{ pour } n \geq 1$$

Alors $M_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} E[X_0]$ donc $M_n \xrightarrow{IP} E[X_0]$

Théorème : [Loi forte des grands nombres] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$

de carré intégrable, deux-à-deux non corrélées

tg $\sup_{n \geq 1} V[X_n] < +\infty$. Alors si $S_n = X_1 + \dots + X_n$,

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$$

Application : [Méthode Monte-Carlo] Soit $g: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ une

fonction intégrable tg g^2 est intégrable. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$

une suite de v.a.r. i.i.d de loi uniforme sur $[0;1]$.

Alors la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)\right)_{n \geq 1}$ converge presque

sûrement dans $\mathcal{L}^1$ vers $I = \int_0^1 g(x) dx$.

2. Approximations des lois usuelles :

Théorème : Soit $n \geq 1$, $X_n \sim P(p_n)$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$

Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim P(\lambda)$.

Théorème : Soit $j \geq 1$, $X_j \sim \mathcal{H}(N_j; n_j; k)$ on suppose

$N_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{n_j}{N_j} = p$. $X_j \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim B(k; p)$

3. Théorème central limite :

Théorème : Soit $(X_n)_n$ suite de v.a.r. i.i.d de carré intégrable. On note m l'espérance et σ^2 la variance de X_0 . Alors $(X_1 + \dots + X_n) - nm \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; \sigma^2)$

Application : Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements indépendants de même probabilité p . Pour $\omega \in \Omega$ on note $N_n(\omega)$ le nombre d'événements réalisés pour les A_i

$N_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ $N_n \sim B(n; p)$ et $\frac{N_n - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; p(1-p))$.

Références : [D] : Jean-François Dantzer "Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités"
[GK]

Annexes :

- Lois discrètes usuelles :

Loi	Notation	$\mathbb{P}_X$	$\mathbb{E}[X]$	$V[X]$
Bernoulli	$B(p)$ $p \in [0; 1]$	$\mathbb{P}(X=1) = p$ $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$	p	$p(1-p)$
Uniforme	$\mathcal{U}([1; n])$ $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$ $\forall k \in [1; n]$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomiale	$B(n; p)$ $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0; 1]$	$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\forall k \in [1; n]$	np	$np(1-p)$
Géométrique	$G(p)$ $p \in [0; 1]$	$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$
Loi de Poisson	$\lambda > 0$ $P(\lambda)$	$\forall k \in \mathbb{N} \mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	λ	λ

- Lois continues usuelles :

Loi	Notation	Densité: f	$\mathbb{E}[X]$	$V[X]$
Uniforme	$\mathcal{U}(a; b)$ $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$	$\forall t \in [a; b]$ $f(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a; b]}(t)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2