

181- Convexité dans $\mathbb{R}^n$ - Application en Algèbre et géométrie.

I. Espaces convexes:

NOUVEAU PLAN : MARIE

1) Définitions:

Déf 1: [Audin 31] Déf. partie convexe d'un E affine.

Ex 2: [Audin 31] Ex I.6.1. Ex d'espaces affines axes

[Beyer 15] Ex 11.1.2.2 / Ex 11.1.2.5

[Obj Agreg 26] Convexe de $\mathbb{R}$ = intervalles

[" " "] Demi-espaces + espaces vect

2) Propriétés des convexes:

Prop 3: [Beyer 19] Critère de convexité

(Prop 4: [Berger 21] Si S est convexe $\bar{S}$ aussi)

Prop 5: [Audin 31] prop 1.6.2. $\cap$ convexe

Contre-ex 6: union de convexes

Prop 7: [Berger 16] Addition de convexes

Déf 8: enveloppe convexe [Audin 32]

Ex 9: [Audin 32] ex d'enveloppes convexes

3) Lien avec les fonctions convexes:

Déf 10: [Obj Agreg 27] f^e convexe

Déf/prop 11: [Obj Agreg 27] Épigraphe + lien f^e convexe

Ex 12: exp au x^2 , épigraphe axe

II. Caractérisation par les barycentres:

1) Définitions et premières propriétés

Déf 13: Barycentres [Combes 133]

Déf 14: Isobarycentre [" "]

NOUVEAU
PLAN: MARIE

Prop 15: Assoc. des barycentres [Combes 134]

Prop 16: App. Affines et bar. [Combes 135]

Déf / prop 17: Repère affine et coord. barycentriques.
[Combes 137]

2) Barycentres et convexité

Prop 18: [Combes 141] déf convexe avec barycentres

Prop 19: [Audin 32] Prop I.6.3 $f^{\leftarrow \text{affine}}(C) = \text{Convexe}$

Prop 20: " " Prop I.6.4 $f^{-1}(C) = \text{Convexe}$

Prop 21: [Combes 143] env. conv = {barycentres}

Thm 22: [Isenmann 166] Carathéodory.

Prop 23: " $f(\text{conv}(X)) = \text{conv}(f(X))$

Prop 24: [Audin 42] Si $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\text{Conv}(S)$ est compact.

3) Points extrémaux:

$\oplus$ ppte $\rightarrow$ convexe compact
= enveloppe convexe de
ses pts extrémaux.

Prop / déf 25: [Combes 143]

Prop 26: [Combes 144] App. affine et point extrémaux.

III. Applications de la convexité en A.L et géométrie

1) Polygones et polyèdres

Prop 27: [Isenmann 389] Suite de polygones pvt

~~Déf 28 : [Audin 153] Polyèdres IV.1 + Polygones~~

~~Prop 29 : [Audin 154] Prop V.4.3~~

~~Prop 30 : [Audin 154] Formule d'Euler et $\{r, s\}$~~

~~Prop/Coro 31 : [Combes 147] Les 5 polyèdres rég. + ANNEXE
[Audin 160]~~

2) Projection et séparation

Thm 32 : [Hahn-Banach] [Beizer 32]

AJOUTER LES
THM. DE PROJECTION

Déf/Prop 33 : [Beizer 34/35] Hyperplan qui sépare

Corollaire 34 : [Zemmar 166] Thm 26.2

L'enveloppe convexe de $\boxed{O_n(\mathbb{R})}$ est compacte +
= Boule unité ... + pts extrémaux = Matrices ortho. DVT

3) Polynômes

Thm 35 : [Gauss-Lucas] [Beizer P69] Thm 11.9.21

Manque :

- déf. polyèdres réguliers

- combinaison convexe

- séparation / projection

- Krein / Milman

- Convexité espace affine / espace vect et le

- lien entre les deux

- peut-être jeter la partie sur les polyèdres.

Plan proposé par le prof :

I) Barycentres

II) Convexité et enveloppe convexe

III) Séparation et applications