

I. Fonctions usuelles : logarithme et exponentielle

1) Cas réel: [Escoper J.P.] A) logarithme népérien

Définition 1: le logarithme népérien est l'unique primitive de la fonction $]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui s'annule en 1. $\forall x > 0, \ln(x) = \int_0^x \frac{1}{t} dt$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 2: si $u: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est dérivable, $\ln \circ u$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in I, \ln(u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Application 3: $\int_0^x \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2} dt = 1 - \frac{1}{x^2+x+1}$

Proposition 4: $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
 $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$ et si $r \in \mathbb{Q}, \ln(a^r) = r \ln(a)$.

Proposition 5: en ANNEXE ① on étudie les variations de $\ln$. $\ln$ est strictement croissante et concave.

Proposition 6: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln(x) = 0, \forall a > 0$

Proposition 7: $\ln$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$

B) Exponentielle

Définition 8: la fonction exponentielle est la fonction réciproque de $\ln$. $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$. Par définition, $\ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x$

Proposition 9: $\exp(0) = 1, \exp(1) = e, (\ln(e) = 1),$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\exp(x)) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\exp(x)) = +\infty$

$\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

On construit les variations de exponentielle en annexe ②. Elle est strictement croissante et convexe

Proposition 10: si $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I , $\forall x \in I, \exp(u(x))' = u'(x) \exp(u(x))$.

Proposition 11: $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$
 $\forall n \in \mathbb{N}, \exp(na) = \exp(a)^n, \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
 $\exp(n) = \exp(1)^n = e^n$

Remarque 12: on peut adopter la notation $x \mapsto e^x$ pour exponentielle, qui se comporte comme une fonction puissance.

Définition 13: on généralise les fonctions puissances aux exposants réels quelconques.
 $\forall a \in \mathbb{R}^*, \text{on définit } x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$

Proposition 14: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x^a = 0, \forall a > 0$

B) sinus et cosinus hyperbolique

Définition 15: on définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions cosinus et sinus hyperboliques par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Proposition 16: ch est paire, sh est impaire, elles sont $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.

Conséquence 17: sh et ch sont solutions de l'équation différentielle $y'' = y$.

Proposition 18: en ANNEXE ③ on étudie les variations et le graphe de ces deux fonctions.
 2) L'exponentielle sur d'autres algèbres:

A) Cas complexes: [Tawel P.]

Définition 19: on définit l'exponentielle complexe

par $\exp: z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ on note $\exp(z) = e^z \forall z \in \mathbb{C}$

Proposition 20: $\exp$ est $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ et a pour dérivée

$\exp(z)$ en tout point $z \in \mathbb{C}$

Proposition 21: si $z, \zeta \in \mathbb{C}$, $e^{z+\zeta} = e^z e^\zeta$, $e^z \neq 0$,

$(e^z)^{-1} = e^{-z}$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, $|e^z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Théorème 22: la fonction exponentielle complexe

induit un homomorphisme de groupes $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot)$

continu, surjectif, mais non-injectif.

Contre-exemple 23: $e^0 = e^{i2\pi k} \forall k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 24: l'application $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ $t \mapsto e^{it}$

est un homomorphisme de groupes surjectif et non

injectif. Son noyau est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$

le réel a qui est le plus petit réel positif tel que

$e^{ia} = 1$ est noté 2π .

Définition 25: on appelle cosinus et sinus les

fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{it}) \quad \sin(t) = \operatorname{Im}(e^{it})$$

Proposition 26: $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$$

$$\cos(t+\pi) = -\cos(t), \quad \sin(t+\pi) = -\sin(t)$$

$$\cos(t+2\pi) = \cos(t), \quad \sin(t+2\pi) = \sin(t)$$

$$\cos(t) = \cos(t+2\pi k), \quad \sin(t) = \sin(t+2\pi k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Proposition 27: $\sin$ et $\cos$ sont $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\sin'(t) = \cos(t) \quad \text{et} \quad \cos'(t) = -\sin(t)$$

Application 28: les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont de la forme $t \mapsto a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$

B) Cas matriciel: [Rem] $\mathbb{K}$ est un corps

Définition 29: $\forall A \in \operatorname{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Théorème 30: $\exp$ est continue de $\operatorname{M}_n(\mathbb{K})$ dans

$\operatorname{M}_n(\mathbb{K})$. $\forall A \in \operatorname{M}_n(\mathbb{K})$ on note $\exp(A) = e^A$

Proposition 31: $\forall A \in \operatorname{M}_n(\mathbb{K})$, e^A est un polynôme en

A et commute avec A .

Théorème 32: $\forall A \in \operatorname{M}_n(\mathbb{K})$, e^A est inversible d'inverse

e^{-A}

Théorème 33: soient $(A, B) \in \operatorname{M}_n(\mathbb{K})$. A et B commutent

ssi $e^{A+B} = e^A e^B$

Théorème 34: $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\operatorname{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème 35: $\exp: \operatorname{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective

ONT 1

II. Fonctions polynômiales:

1. Fonctions polynômiales à variable réelle.

Théorème 36: Toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

est limite uniforme d'une suite de fonctions

polynômes.

Définition 37: on appelle polynôme trigonométriques

de degré $\leq n$ de la variable réelle x toute fonction

de la forme $x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ ($c_k \in \mathbb{C}$)

Théorème 38: toute fonction continue 2π -périodique

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de

polynomes trigonométriques

Notations 39: soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique continue
 $\forall m \in \mathbb{Z}$ on note $c_m(f)$ le n -ième coefficient de Fourier

de f .
Théorème 40: si f est $\mathcal{C}^2$, 2π -périodique et continue
 alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ converge normalement vers f sur $\mathbb{T}$

Théorème 41: $(e_n: x \mapsto e^{inx})_{n \geq 0}$ est une base de $L^2([0, 2\pi])$
 donc $\forall f \in L^2([0, 2\pi])$, $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ (Parseval)

Application 42: soit $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 \in L^2([0, 2\pi])$,
 il existe une unique fonction $u: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle
 que

i) $\forall t > 0$, $u(t, \cdot)$ est 2π -périodique

ii) $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

iii) sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

iv) $u(t, \cdot)$ converge en norme $L^2([0, 2\pi])$ vers u_0 quand
 t tend vers 0.
 De plus u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

III) Autres fonctions et applications théorèmes des nombres

1) Fonction zêta: [Gauden X.7]

Définition 43: pour tout $s > 1$ on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

Proposition 44: ainsi définie, ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$,
 converge en $+\infty$ et diverge lorsque $s \rightarrow 1^+$

Proposition 45: on note $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ la suite des
 nombres premiers rangés dans l'ordre croissant
 $\forall s > 1$ $\zeta(s) = \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_m^s}\right)$ [Formule d'Euler]

Application 46: $\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{p_m} = +\infty$

2) Stirling et Wallis

Définition 47: pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la n -ième
 intégrale de Wallis $\mathcal{I}_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx$

Proposition 48: $\frac{1}{n} \left[\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \right] \sim \pi$ $_{n \rightarrow +\infty}$

Théorème 49: $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$

3) Diviseurs entiers inférieurs à x

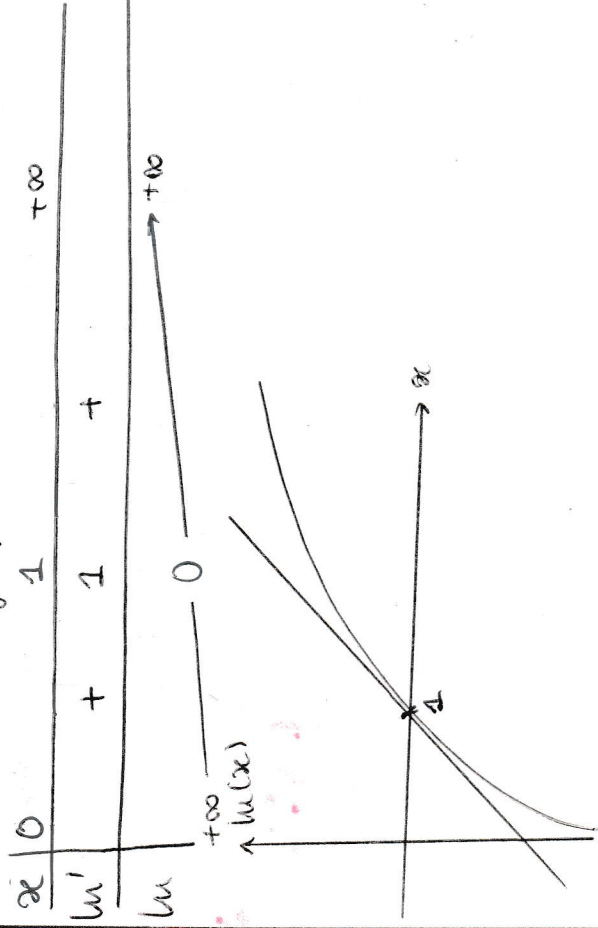
Théorème 50: pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note τ_n le nombre de
 diviseurs de n dans $\mathbb{N}$. Si $x \in [1, +\infty[$, on pose

$$F(x) = \sum_{1 \leq m \leq x} \tau_m$$

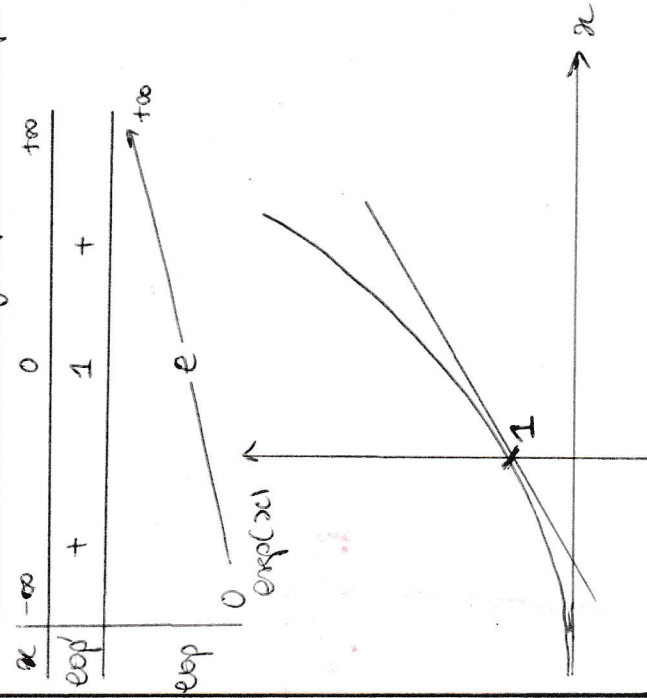
Alors $F(x) = x \log(x) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$.

DVT3

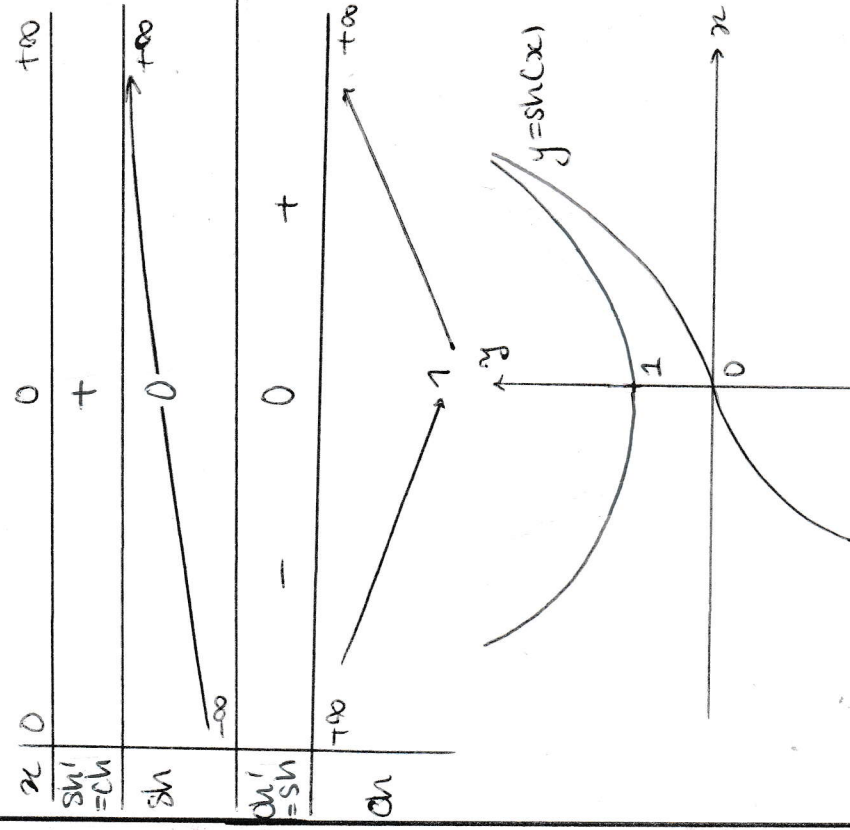
Variations et graphe de $\ln$: ①



② Variations et graphe de $\exp$:



③ Variations et graphes de ch et sh :



[Goudon X] Analyse
 [Rombaldi J.E] Algèbre
 [Tauvel P] Analyse complexe pour la licence
 [Escoper J.P] Route l'analyse de la licence