

II) Suites de f^o et séries entières

1) Convergence d'une suite de fonctions

- convergence simple
 - convergence uniforme
 - Ex et contre-ex
 - Thm conv unif garde continuité (Esc 539)
- Hors sujet
- Esc 534 - 536

1) Série de fonctions:

- ~~Def~~: série de f^o Def série de f^o
 - ~~Def~~: convergence norm
 - conv normale $\Rightarrow$ conv unif
 - Ex et contre ex
 - $\sum f_n$ continue p 540 esc
- [Esc 536 - 537]

3) Séries entières:

- ~~Def~~: série entière
- somme de série entière, produit par un scalaire
-

#1) Convergence et opérations sur les séries entières

1) Rayon de convergence

○ Déf.

○ ppte p. 543 [Esc]

○ Déf. disque de convergence

○ ppte. disque de convergence.

○ ppte p. 545 [Esc]

2) Étude des termes (un):

○ Esc p. 546 / zéros isolés

○ Esc 547 f^c paire et impaire

○ Somme / produit série entière

○ composition de séries entières

3) Déterminer le rayon de convergence:

○ D'Alembert

○ Cauchy

○ Hadamard - Cauchy

4) Convergence sur le bord du disque:

○ thm radial d'Abel [Esc 550]

[DVT 1]

[DA + Gou
+ Bernin]

III) Étude des séries entières

1) Régularité:

○ $\sum a_n z^n$ $\sum n a_n z^{n-1}$ $\sum \dots$

○ Dérivée

○ Intégrale

○ Analytique

○ Holomorphe

○ App: Também en faible.

2) DSE:

○ Def DSE

○ Série Taylor-Mc-Laurin

○ unicité DSE

○ App: f^c exp

○ App: f^c circ. et hyperbolique.

○ DSE f^c usuelles [Dantzer]

} Table 40-41

IV) Quelques applications:

1. Nombre de dérangements en combinatoire

2. Équa. diff. et séries entières.

I. série entière, rayon de convergence :

1) série de fonctions, série entière :

[1] Déf série de fonctions + série entière

[2] Ex et contre-ex

[3] Déf argce normale

[4] CVN $\Rightarrow$ CVU

[5] Déf : fonction somme

[6] $\sum f^k \mathcal{C} = f^0 \mathcal{C}$

[7] Ex et contre-ex

2) Rayon de convergence :

[8] Déf [9] Ex

[10] ppte p. 543 [Esc]

[11] Déf disque de argce

[12] ppte disque de argce

[13] ppte p. 545 [Esc]

3) Calcul de rayon de argce :

[14] Comparaison entre D.S.E, $\mathcal{O}$, $\sim_{+\infty}$ [15] [16] Ex

[17] O Stiembeit

[18] Cauchy

[19] Hadamard-Cauchy

$$\frac{z^{3n+4}}{2^n} = e^{(3n+4)\ln(z)} e^{-n\ln(2)}$$

$$= e^{(3n+4)\ln(z) - n\ln(2)}$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{3n\ln(z) - n\ln(2)}$$

$$= \frac{z^{3n}}{2^n}$$

$$= \left(\frac{z^3}{(\sqrt[3]{2})^3} \right)^n$$

$$\text{car si } \left| \frac{z^3}{(\sqrt[3]{2})^3} \right| < 1$$

$$\Rightarrow R_A \geq R_B \quad \text{i.e. } |z| < \sqrt[3]{2}$$

$$\text{donc } R_A = +\infty$$

II) Somme et régularité:

1) Termes d'une SE et lien avec la somme:

[20] f^e paire - impaire :

[21] $f(z) + g(z)$

[22] $(f \times g)(z)$ [23] Ex

2) Régularité:

[24] continuité

[25] dérivée, int [30] Ex

[26] Rayon cv dérivée / int

[27] f^e somme dér dans disque cv

[28] Analyticité f^e somme

[29] Holomorphie f^e somme

3) Etude sur le bord du disque de CV:

[31] Thm d'Abel radial

[32] Ex et contre-ex

[33] Thm Tauberien [DVT 1]

III. DSE:

1) Développement en série entière:

[34] Def DSE

[35] Ex

[36] Csqce: analytique, holomorphe...

[37] Taylor - Mc Laurin [3] Ex

[39] Thm de Bernstein DVT 2

[40] Unicité DSE

2) Fonctions usuelles:

[41] exp

[42] 1^{re} hyperb.

[43] DSE usuels

IV. Applica^E:

1) Nb de dérangements

[44]

2) Equa diff

[45] Gouudon.