

L.230. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

I. Séries numériques :

1. Premières définitions :

Définition 1 : soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle ou complexes. On lui associe la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^n u_k$

La suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est notée $\sum_{n \geq 0} u_n$ et appelée série de terme général u_n . Pour $m \in \mathbb{N}$, U_m est la somme partielle au rang n des termes de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exemple 2 : séries arithmétiques : $\sum_{n \geq 0} na$ dont les sommes partielles sont $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^n ka = \frac{n(n+1)}{2} \times a$ (a.e.c)

• séries géométriques : $\sum_{n \geq 0} q^n$ où $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$
les sommes partielles sont $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2. Convergence :

Notation 3 : soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 4 : on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est convergente. Dans ce cas on note

i) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)$ qu'on appelle somme de $\sum_{n \geq 0} u_n$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - U_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ qu'on appelle reste de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ au rang n .

Proposition 5 : si $(u_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0 alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge

Exemple 6 : $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge grossièrement.

Corollaire 7 : si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $u_n \rightarrow 0$

Proposition 8 : [Critère de Cauchy] $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq 0, |u_n + \dots + u_{n+p}| \leq \varepsilon$.

Proposition 9 : si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k$

• si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \sum_{n \geq 0} \lambda u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k$

• si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge

alors $\sum_{n \geq 0} u_n + v_n$ diverge.

Exemple 10 : $\sum_{n \geq 0} n$ diverge et $\sum_{n \geq 0} -n$ diverge pourtant $\sum_{n \geq 0} (n-n) = \sum_{n \geq 0} 0$ converge.

II. Séries à termes réels - étude selon leur signe :

1) Séries à termes positifs : $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}_{+}^{\mathbb{N}}$

A) "Recettes" de convergence :

Proposition 11 : $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ssi (U_n) est majorée.

Corollaire 12 : si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$ alors :
si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

Proposition 13 : si $v_n = O(u_n)$ si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\sum_{n \geq 0} v_n$ aussi

si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ ont la même nature

Exemple 14 : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (résultat énoncé ci-dessous)

De même $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^2 + n + 1}$ est divergente.

Proposition 15: [comparaison série-intégrale] si $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est positive, continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ alors si $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq 0$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ ont la même nature. (voir figure 1 en annexe)

Application 16: si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Application 17.1: On définit $f: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(t) = 0$ sauf sur les intervalles de la forme $[n, n + \frac{2}{n^3}]$ où f forme un pic tel que $f(n + \frac{1}{n^3}) = n$ (voir figure 2 en annexe). Alors $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

B) Propriétés des sommes et des restes:

Proposition 18: si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection, alors $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge et leurs sommes sont égales.

Proposition 19: $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent et $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} v_n$
 $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ vérifient $R_n \sim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Proposition 20: si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ divergent et $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} v_n$ alors $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ vérifient $U_n \sim_{n \rightarrow \infty} V_n$

Application 21: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) \rightarrow$ en prenant $v_k = \ln(1 + \frac{1}{k}) = \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$

2) Séries alternées:

Définition 22: une série alternée est une série dont le terme général alterne entre le signe positif et négatif.
Exemple 23: $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ est une série alternée.

Proposition 24: si (a_n) est une suite à termes positifs décroissante tendant vers 0 alors $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge et les restes vérifient $\forall n \in \mathbb{N} |R_n| = |\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k| \leq a_n$

Proposition 17.2: si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes strictement positifs et il existe un rang à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors:

- i) si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge
- ii) si $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge, $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge

Proposition 17.3: [d'Alembert] $\sum u_n$ est une série à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \lambda \in]0; 1[$

i) si $\lambda < 1$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge

ii) si $\lambda > 1$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge

Exemple 17.4: $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$

Contre-exemple 17.5: $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}$ converge avec $\frac{(n+1)^2}{n^2} \rightarrow 1$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n}$ diverge pour $x=1$ et converge pour $x=-1$.

Proposition 17.5: [Cauchy] $\sum u_n$ est à termes > 0 et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in]0; +\infty[$ alors on a les mêmes conclusions qu'en 17.3

III. Séries à termes quelconques:

$\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série à termes réels ou complexes quelconques

1) Convergence absolue:

Définition 25: Si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge, on dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente.

théorème 26: Si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge

Contre-exemple 27: $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge mais ne converge pas absolument

2) Transformation et règle d'Abel:

Proposition 28: Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série avec $u_n = a_n v_n$

on note $S_m = \sum_{k=0}^m v_k$. Alors $\sum_{k=0}^m u_k = \sum_{k=0}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_m S_m$

théorème 29: Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est tq $u_n = a_n v_n$ où:

- $(a_n)_n$ est une suite positive décroissante, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- $(S_m)_m$ est bornée (cf notation prop 28)

alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente

3) produit de séries, interversion de sommes ^{SSI}
Proposition 30: Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument alors elle est commutativement convergente. i.e.

$\forall \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge ~~(*)~~

théorème 31: [produit de Cauchy] Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergents alors

DVT 1

Si on pose $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$, $\sum_{n \geq 0} w_n$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

théorème 32: Soit $(u_p, q)_{p, q \in \mathbb{N}}$ une suite à double entrée, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors on a équivalence entre:

(i) $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p \geq 0} u_{p, q}$ converge absolument et $\sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p \geq 0} |u_{p, q}| \right)$ converge

(ii) $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{q \geq 0} u_{p, q}$ converge absolument et $\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q \geq 0} |u_{p, q}| \right)$ converge.

Dans ces hypothèses, on a de plus

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p, q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p, q}$$

IV. L'espace $\ell^2(\mathbb{R})$:

Proposition 33: $\ell^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ soit convergente

- 1) $\ell^2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
- 2) Si $(u_n), (v_n)$ sont dans $\ell^2(\mathbb{R})$, $\sum_{n \geq 0} u_n \cdot v_n$ converge absolument

3) l'application: $\ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $((u_n), (v_n)) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$

est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$. On note

- 1) $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée.
- 4) $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert

DVT 2

Annexe:

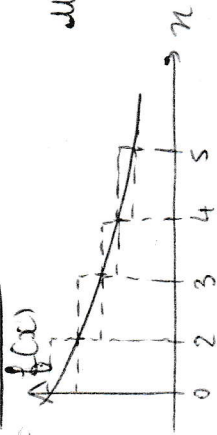


Figure 1

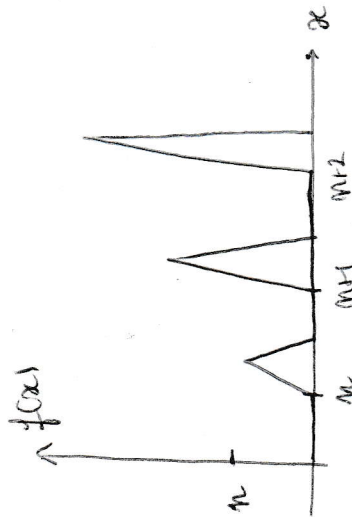


Figure 2

$$u_1 + \dots + u_6 \leq \int_0^6 f(t) dt \leq u_0 + \dots + u_5$$

(*) $\frac{(-1)^n}{n}$ en réarrangeant on fait w vers ce qu'en veut

DVT possible: dvt asymptotique de la série harmonique:

DVT série harmonique $\ln(n) \sim \frac{1}{2}$

DVT [Goudon]: $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$

continue décroissante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \sim \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} f(u) du$$

App: $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$

[E] Escalier - Toute l'analyse de la licence
[D] Dantzer - Analyse pour l'agrégation
[G] Goudon - Analyse - 3ème édition