3) Factorisation de Cholesky $\boxed{\text{DEV2}}$

Théo 23 Soit A une matrice symétrique réelle définie positive. Il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et qui vérifie $A = B^tB$.

NB24 : $AX = b \Leftrightarrow B^tBX = b$
On résout $BY = b$ puis ${}^tBX = Y$.
Complexité : $O(n^3)$.

4) Factorisation QR et problème aux moindres carrés

Théo25 Soit A matrice réelle inversible. Il existe un unique couple (Q,R) où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs tel que $A = QR$.

NB26 $AX = b \Leftrightarrow QRX = b \Leftrightarrow RX = {}^tQb$.
On arrive à un système échelonné
Complexité $O(n^3)$.

NB27 On peut généraliser ce théorème au cas où $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ de rang p. On aura alors $Q \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ avec ${}^tQQ = I_p$ et R matrice triangulaire supérieure

Déf28 Un problème aux moindres carrés consiste à trouver la (ou les) solution(s) $X \in \mathbb{R}^p$ du problème de minimisation suivant $\|b - AX\|_n = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \|b - Ay\|_n$

où $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\|.\|_n$ norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

NB29 La factorisation QR permet de résoudre un problème aux moindres carrés.

Prop30 : Résoudre l'équation $AX = b$ au sens des moindres carrés revient à résoudre l'équation $RX = {}^tQb$.