

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,

I. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes:

1. Définitions:

Définition 1: $A \in M_n(K)$ est symétrique si ${}^tA = A$. On note $S_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid {}^tA = A\}$

Définition 2: $A \in M_n(K)$ est anti-symétrique si ${}^tA = -A$. On note $A_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid {}^tA = -A\}$

Définition 3: $A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si ${}^t\bar{A} = A$. On note $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = A\}$

Proposition 4: une matrice hermitienne peut s'écrire de façon unique sous la forme $M = S + iA$ avec $S \in S_n(\mathbb{R})$, $A \in A_n(\mathbb{R})$

Proposition 5: $S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont des s.e.v. de $M_n(K)$ et $M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$

Proposition 6: $\dim(S_n(K)) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(A_n(K)) = \frac{n(n-1)}{2}$

2. Lien avec les formes bilinéaires symétriques et hermitiennes:

Définition 7: $\varphi: E \times E \rightarrow K$ est une forme bilinéaire symétrique si $\forall x, y \in E$

$\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ et $\varphi(x, \cdot)$ et $\varphi(\cdot, y)$ sont linéaires.

Définition 8: $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, E un $\mathbb{C}$ -ev

est une forme esquiléaire si, $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, \cdot)$ est linéaire et $\varphi(\cdot, y)$ est anti-linéaire. Elle est dite à symétrie hermitienne si $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.

Exemple 9: $\varphi: \mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$
 $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$

Proposition 10: si B est une base de E , φ une forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) alors $\forall (x, y) \in K$ de vecteurs coordonnées X et Y , $\varphi(x, y) = {}^tX \text{Mat}_B(\varphi)Y$ (resp. $\varphi(x, y) = {}^t\bar{X} \text{Mat}_B(\varphi)Y$).

Proposition 11: soient B et B' deux bases de E , $P = P_{B \rightarrow B'}$ alors $\text{Mat}_{B'}(\varphi) = {}^tP \text{Mat}_B(\varphi)P$ (resp. ${}^t\bar{P} \text{Mat}_B(\varphi)P$).

Proposition 12: φ est bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) sur E si sa matrice dans une base B est symétrique (resp. hermitienne).

Exemple 13: $\varphi(x, y) = \bar{x}x - 2\bar{y}y + \frac{3i}{2}\bar{y}x - \frac{3i}{2}\bar{x}y$ avec $x, y \in \mathbb{C}^2$, $\text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3i}{2} \\ \frac{3i}{2} & -2 \end{pmatrix}$

II. Orthogonalité et réduction:

1. Réduction de Gauss et loi de Sylvester:

Théorème 14: [Réduction de Gauss] Pour toute forme quadratique (resp. hermitienne), i.e. $q: x \in E \rightarrow \varphi(x, x)$ où φ est bilinéaire symétrique

(resp $q: x \in E \mapsto \varphi(x; x)$ où φ est sesquilinéaire à symétrie hermitienne) non-nulle sur E , il existe un entier $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ des scalaires non-nuls et $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ des formes linéaires indépendantes de E^* tels que $\forall x \in E \quad q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i(x)^2$

théorème 15: avec les notations qui précèdent, il existe une base de E dans laquelle q est diagonale avec r coefficients non-nuls.

définition 16: une telle base est dite orthogonale relativement à q

corollaire 17: pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ il existe une matrice inversible P telle que ${}^t P A P$ soit diagonale (resp. ${}^t P A P$).

proposition 18: dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut supposer $\lambda_i > 0$ pour $1 \leq i \leq s$ et $\lambda_i < 0$ pour $s+1 \leq i \leq r$ dans le théorème 14. On a alors, $\forall x \in E$

$$q(x) = \sum_{i=1}^s (\sqrt{\lambda_i} x_i)^2 - \sum_{i=s+1}^r (\sqrt{-\lambda_i} x_i)^2$$

théorème 19: [Sylvester] Il existe un unique couple d'entiers naturels (s, t) tels que pour toute base $B = (e_1, \dots, e_n)$, q -orthogonale $s = \#\{e_i \mid q(e_i) > 0\}$, $t = \#\{e_i \in B \mid q(e_i) < 0\}$ et $\text{rang}(q) = t + s$. (s, t) est la signature de q .

exemple 20: $q(x, y, z) = xy + yz + zx$ dans $\mathbb{R}^3$
 $q(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x+y+z)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(x-y)\right)^2 - z^2$

Matriciellement, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est donc

équivalente à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et la signature de q est $(1, 2)$.

proposition 21: Il existe $(n+1)(n+2)$ couples (s, t) tels que $0 \leq s \leq n$, $0 \leq t \leq n^2$ et $t+s \leq n$. Il existe donc autant de matrices de la forme $\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui définissent les classes matricielles symétriques de $\mathbb{R}^n$ de même sign.

2. Théorème spectral:

théorème 22: toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp.

$\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$) se diagonalise dans une base orthonormée et de plus ses valeurs propres sont réelles. $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (resp $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$) tel que $A = {}^t P D P$ (resp. ${}^t P D P$) où D est diagonale réelle.

corollaire 23: Soit $M, N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $M, N \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$). Alors si M est définie positive, il existe C , une matrice inversible telle que ${}^t C M C = I_n$ et ${}^t C N C = D$ (resp ${}^t C M C = I_n$ et ${}^t C N C = D$) avec D matrice diagonale réelle.

3. Matrices symétriques réelles:

définition 24: $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^t X A X \geq 0$. A est dite définie positive si elle est positive et $\exists A X = 0 \Leftrightarrow X = 0$. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ positive}\}$
 $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ définie positive}\}.$

Théorème 25: Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Corollaire 26: $A \in M_n(\mathbb{R})$. $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = tBB$.

Théorème 27: une matrice symétrique est définie positive ssi tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Corollaire 28: $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Théorème 29: soit $(A_i)_{i \geq 1}$ une famille de $S_n(\mathbb{R})$. Il existe une base orthogonale commune de diagonalisation ssi les matrices commutent deux-à-deux.

Application 30: $N: A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \sqrt{\text{Tr}(tAA)}$ est une norme d'algèbre. De plus, $\|A\| = \sqrt{\rho(tAA)}$

Théorème 31: Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists ! B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $A = B^2$

Théorème 32: toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in GL_n(\mathbb{R})$) peut s'écrire (resp. de manière unique) $A = \Omega S$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$).

III. Applications:

1. Calcul différentiel:

Théorème 33: Soit $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^2 . Soit $a \in U$ tel que $df_a \neq 0$. La matrice Hesseienne de f en a est $Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_m \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}$

Si f admet un minimum (resp. un maximum) en a , $Hf(a)$ est une matrice symétrique positive (resp. négative).
Si $Hf(a)$ est une matrice symétrique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. un maximum) en a .
Contre-exemple 34: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3$ en $a=0$
 $Hf(0)=0$ mais f n'admet pas d'extremum en 0.

2. Recherche de valeurs propres, $A \in S_n(\mathbb{R})$:

Théorème 35: soient $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < q \leq n$ où n est la dimension de la matrice A dont on cherche les valeurs propres. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \downarrow & \\ & \cos \theta & \sin \theta \\ & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \downarrow & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & \downarrow & \\ & & & 1 & \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ \\ q \\ \\ 1 \end{matrix}$$

Alors comme $A \in S_n(\mathbb{R})$, $t\Omega A \Omega \in S_n(\mathbb{R})$ et en notant $(a_{ij})_{i,j} = A$ $(b_{ij})_{i,j} = t\Omega A \Omega$,
 $\sum_{i=1}^m a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^m b_{ij}^2$ et il existe une unique valeur pour θ dans $]-\frac{\pi}{4}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{4}[$ tq $b_{pq} = 0$, c'est la solution de $\cotan(2\theta) = \frac{a_{qq}-a_{pp}}{2a_{pq}}$
on a alors $\sum_{i=1}^m b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^m a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$

on construit la suite $(A_k)_k: A_0 = A$ et $\forall k \in \mathbb{N} \quad A_{k+1} = t\Omega_k A_k \Omega_k$ où Ω_k est construite comme Ω avec (p, q) choit tq $|a_{pq}^k| = \max_{i \neq j} |a_{ij}^k|$
Alors $(A_k)_k$ converge et $\exists \theta \in S_m$ tq $\lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k) = (\text{diag}(\lambda_{p(1)}))$; et $\theta_k = \Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_k$ converge vers $\theta \in O_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes constituent un ensemble orthonormal de vecteurs propres de A .