L155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

[Gri 153] [Gou 153] [Gou 162] [Gou 153] [Gou 163] [Gri 158] [Gri 160] [Gri 161] [Gri 201]

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. On prend $f \in \mathcal{L}(E)$.

I. Endomorphismes diagonalisables:

1. Éléments propres:

Définition 1: Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, α est une valeur propre de f si $f - \alpha Id_E$ est non-injective. Dans ce cas il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \alpha x$. x est appelé vecteur propre de f (abrev. vp/$\overrightarrow{vp}$)

Exemple 2: $E = \mathbb{R}^3$ et f est la projection sur un plan π parallèlement à une droite $\mathcal{D}$ si $v \in \pi$, $f(v) = v$. si $w \in \mathcal{D}$, $f(w) = 0$. 1 et 0 sont valeurs propres de f. et si $v \in \pi$ v non-nul alors v est vecteur propre associé à 1 de même tout $w \neq 0$ $w \in \mathcal{D}$ est $\overrightarrow{vp}$ associé à 0

Définition 3: Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est vp de f, l'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$ est appelé sous-espace propre de f associé à λ. (abrev. sep)

Exemple 4: π et $\mathcal{D}$ dans l'ex. 3 sont des sep.

Proposition 5: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des vp de f distincts deux-à-deux. Alors les sep $E_{\lambda_1} \dots E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

2. Endomorphisme diagonalisable:

Définition 6: f est diagonalisable si il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Proposition 7: f est diagonalisable ssi il existe une base de vecteurs propres de E.

Exemple 8: • $f = id$, dans toute base $\mathcal{B}$ de E $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9: $E = \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice. Déterminer les valeurs propres, vecteurs propres et la forme de $Mat(f)$ dans une base de $\overrightarrow{vp}$.

3. Polynôme caractéristique:

Définition 10: Le polynôme caractéristique de f est le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ $\chi_f(X) = \det(f - X id)$

Remarque 11: un endomorphisme a le même polynôme caractéristique que sa matrice dans n'importe quelle base.

Proposition 12: si A et B sont deux matrices semblable, $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.

$$\chi_A(X) = \chi_{tA}(X)$$

Proposition 13: λ est valeur propre de f ssi $\chi_f(\lambda) = 0$

Exercice 14: $E = \mathbb{R}^2$ et f a pour matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\chi_t(X)$ et donner les valeurs propres de f.

Proposition 14: Soit $F \subset E$ un sev, $F \neq E$ et $F \neq \{0\}$

si F est stable par f et $g = f|_F$ alors $\chi_g \mid \chi_f$.

II. Diagonalisabilité et polynômes d'endomorphisme

1. Premières conditions :

Théorème 15 : si $\lambda_1 \dots \lambda_p$ sont les valeurs propres de f. Alors il y a équivalence entre :
(i) f est diagonalisable
(ii) $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$
(iii) $\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = \dim(E)$

Corollaire 16 : si f admet n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.

Exemple 17 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car elle a 3 valeurs propres : 0, 1 et 2.

Proposition 18 : si λ est valeur propre de f d'ordre α (i.e. racine d'ordre α de $\chi_f(X)$) alors $\dim(E_\lambda) \leq \alpha$.

Théorème 19 : f est diagonalisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ d'ordre α de χ_f, $\dim(E_\lambda) = \alpha$

Exemple 20 : $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable valeurs propres sont 1 et -2 de multiplicités respective 2 et 1 et de sep correspondants de dimensions 1 et 1.

2. Théorème des noyaux, polynôme annulateur :

Notation 21 : Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$
On définit la fonction $P(f)$ par : $P(f) = a_0 \mathrm{id} + a_1 f + \dots + a_p f^p$

Proposition 22 : $\forall P, Q \in \mathbb{K}[f]$, $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f)$

Proposition 23 : si $P \in \mathbb{K}[f]$ est tq $P(f) = 0$ alors si λ est valeur propre de f, $P(\lambda) = 0$.

Contre-exemple 24 : la réciproque est fausse
Par exemple $P(X) = X(X-1)$ annule id_E pourtant 0, racine de P n'est pas racine de id_E.

Théorème 25 [décomposition des noyaux] :
si $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux-à-deux alors $\ker(P(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \dots \oplus \ker(P_r(f))$

Remarque 26 : ce théorème reste vrai en dim. infinie

Théorème 27 : f est diagonalisable ssi il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racine simple sur $\mathbb{K}$ tq $P(f) = 0$. On appelle un tel polynôme polynôme annulateur

3) Diagonalisation simultanée :

Proposition 28 : si f est diagonalisable et F CES est stable par f, alors $f|_F$ est diagonalisable.

Proposition 29 : si f et $g \in \mathcal{L}(E)$ commutent alors $\mathrm{Im}(f)$ et tout s.e.p. de f sont stables par g.

Théorème 30 : si f et g sont diagonalisables et commutent, alors f et g sont diagonalisables dans une base commune de diagonalisation.
(la réciproque est fausse)

4) Polynôme minimal :

Définition 31 : on note $I = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0\}$. I est non-vide et c'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Donc $\exists \Pi_f \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I = (\Pi_f)$. On appelle Π_f polynôme minimal de f

[Gou 145] [Gou 147] [Gou 148] [Gou 174] [Gri 167] [Gri 170]

DVT 2 (Gou 145)
DVT 1

[Gri 176]

Remarque 32 : le polynôme minimal de f et celui de sa matrice dans n'importe quelle base sont égaux

Proposition 33 : λ est valeur propre de f ssi λ est racine de $\Pi_f(X)$.

Exemple 34 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\Pi_A(X) = (X-1)(X+2)$

Théorème 35 : [Cayley-Hamilton] $\chi_f(f) = 0$

Théorème 36 : Π_f est scindé à racines simples ssi f est diagonalisable.

5) Diagonalisée une exponentielle de matrice.

[Gri 152] DVT 2

Théorème 37 : [Dunford] si χ_f est scindé alors f se décompose de manière unique sous la forme

$f = d + n$

où d et n sont des polynomes en f, commutant et tels que d est diagonalisable et n nilpotent.

Exemple 38 : donner la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

III. Endomorphismes symétriques :

1. Généralités :

[Gou 244]

Définition 39 : Si $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ est euclidien, f et $g \in \mathcal{L}(E)$ sont dits adjoints si $\forall (x,y) \in E^2$,

$\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$

En dimension finie il existe un unique endomorphisme adjoint à f. On le note f^*

si $f = f^*$ on dit que f est auto-adjoint, ou symétrique.

2) Réduction :

Proposition 40 si $F \subset E$ s.e.v. est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f.

Théorème 41 : [Spectral] Si f est symétrique, alors les valeurs propres de f sont réelles et f est diagonalisable dans une base orthonormée

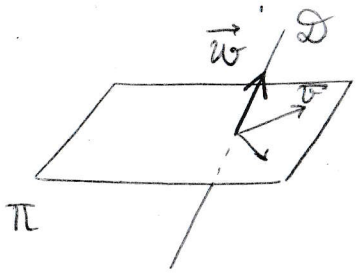
Application 42 : Pour toute forme quadratique sur E il existe une base orthonormée dans laquelle la forme quadratique a pour matrice une matrice diagonale réelle.

Théorème 38 bis : si $A = D + V$ (Dunford) alors $e^A = e^D e^V$

Corollaire 38 ter : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable

[Rom 749]

Figure 1 :



[Gou] Xavier Gourdon - Algèbre - 2ème édition.
[Gri] Joseph Grifone - Algèbre Linéaire - 6ème éd.