I) Déterminant d'une famille de vecteurs :

1) Deux définitions :

on notera Dét

① Définition de Cramer [Esc 272] $\text{Dét}(u_1 \dots u_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \dots$

on notera dét

② Définition par récurrence [Gri 105] [Esc 273]

③ Règles de calcul - Règle de Sarrus [Gri 106] [Esc 279]
formule de Cramer en 2×2 et 3×3 [Esc 271]

④ Exemple de calcul par les deux mthd

2) dét est une forme multi-lin alternée :

⑤ Déf forme p-linéaire [Rom 1 - 535] ⑥ Ex bilinéaire

⑦ Déf forme alternée [Rom 1 - 535] ⑧ Ex (prendre une mat anti-sym)

⑨ Thm : {formes n-lin alt sur $\mathbb{R}^n$} est de dim 1 [Gou 135]

⑩ Prop : φ forme n-linéaire alt : • si $(u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ liée, $\varphi((u_i)_i) = 0$
• on ne change pas la val de φ par C.L. de vect → [Esc 278]

⑪ Soit B une base, l'app. $\text{dét}_B : (u_1, \dots u_n) \mapsto \text{dét}(u_1, \dots u_n)$ $(\text{dét}_B(B) = 1)$
est : n-linéaire, alternée, change de signe si on échange deux colonnes [Gri 107-108] [Esc 275-278] ○ Ex mat 3×3

3) Égalité des deux définitions :

⑫ Proposition : $\text{dét}(u_1 \dots u_n) = \varepsilon(\sigma)\, \text{dét}(u_{\sigma(1)} \dots u_{\sigma(n)})$ [Esc 278]

⑬ Prop : $\forall \varphi$ forme lin n-alt → $\varphi(u_1 \dots u_n) = \text{Dét}(u_1 \dots u_n)\, \varphi(e_1 \dots e_n)$
dans la base $B = (e_1 \dots e_n)$ ↳ $\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \dots$ [Esc 278]

⑭ Coro : égalité des déf Dét et dét_B en prenant $\varphi = \text{dét}_B$ [Rom
avec $\text{dét}_B(B) = 1$

II) Propriétés du déterminant :

1) Déterminant d'une matrice : règles de calcul.

(15) $\det(A) = \det({}^tA)$ (16) Ex de calcul ${}^tA$, A

(17) Rq : règles sur les col. se transpose aux lignes

(18) déf cofacteur

(19) calcul dét avec le dvt / à col

Ex de Calcul

Calcul dét avec matrices élémentaires

Ex de calcul

dét d'une matrice triangulaire App $\det(e^A) = e^{Tr(A)}$

$\det(AB) = \det(A)\det(B) \to A$ inv $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ (on sait que $\det(A) \neq 0, A \in GL_n$)

$\det(PAP^{-1}) = \det(A)$

App : $\chi_A = \chi_B$ matrices semblables

Calcul de l'inverse d'une matrice $A^{-1} = \dfrac{{}^t\mathrm{Com}(A)}{\det(A)}$

Ex : inverse mat 2x2 / mat 3x3

2) Déterminant d'un endomorphisme :

Thm [caractérisation des bases] [Esc 282] [Gn 110]

déf : dét endo $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1) \dots f(e_n))$

prop : $\det(f)$ dépend pas de la base choisie. [Esc 282] [Gou 136]

prop : formule du volume [Esc 283]

prop : critère d'inversibilité

App : polynôme caractéristique et valeur propre

prop : dét composée $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$

$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}(f))$.

Rq : on peut alors retrouver les props pour les matrices

III) Applica°, déterminants classiques :

1) Interprétation géométrique :

- Aire d'un parallélogramme [Esc 287-288]
- Volume [Esc 288]
- App : formule de changement de var $\mathbb{R}^n$ + Jacobien

2) Déterminants classiques :

- Dét circulant [Gou 146]
- App : suite de Polygones DVT 1
- Gramm [Rom 560]
- Thm $rg(G(x_1 \dots x_n)) = rg(x_1 \dots x_n)$ [Rom 560]
- App : distance à un sev [Rom 561]
- Vandermonde [Rom 549]
- App : pol interp Lagrange [Rom 551]
- App. Thm sur f et $f^{(p+1)}$ bornées $\Rightarrow$ $f^{(k)}$ bornée $\forall k \in [\![0;p]\!]$

3) Continuité du déterminant :

- dét est une fonction polynomiale homogène de degré n
- det est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{n^2}$ [Rom 541]
- App : $Gl_n(\mathbb{K})$ est D.O.C. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ [Cal 114] DVT 2
- App : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ [Cal 116]

Retours sur ce plan:

▷ Parallélogramme en dimension 3: $u=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ $v=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\|u \wedge v\|=$ aire du parallélogramme $(u;v)$

ou alors avec Gram-Schmidt

▷ Manque:

rang, déterminant et mineur

* rang = taille de la plus grande sous-matrice de déterminant non-nul
* Pivot de Gauss
* Système linéaire résolution. $AX=B$ a une unique solu^{o} ssi $\det(A) \neq 0$
* App. 40 → ne pas mettre si c'est pas un dvt.