

Soit $(A, +, \times)$ un anneau unitaire commutatif

I. Anneaux et idéaux :

Déf : anneau [Gau]

Déf : diviseur de zéro [Gau]

Déf : intègre [Gau]

Déf : corps [Esc 220]

Déf : sous-anneau [Gau]

1) Anneaux : généralités

Déf : idéal [Gau]

2) idéaux : généralités

Prop : idéaux de $\mathbb{Z}$: $n\mathbb{Z}$ [Esc 224]

Déf : idéal engendré [Gau]

Prop : opérations sur les idéaux [Esc 458]

Déf : idéal principal [Gau]

Déf : anneau principal [Esc 224]

Ex : $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

3) Structure d'anneaux / jouer avec les anneaux:

Déf. Congruences [R214]

Déf: anneau quotient $[Gau]$

Déf: morphisme d'anneaux + $\ker(f) [Gau]$

Prop: $\exists!$ morphisme d'anneaux commut $f: \mathbb{Z} \rightarrow A$ [Esc 222]

Prop: image / pré-image d'un anneau par un morphisme d'anneaux $[Gau]$

Prop: isomorphisme quotient [théorème d'isom]
[P 41]

Déf: caractéristique $[Gau]$

Prop: caract d'un anneau intègre = 0 ou n premier $[Gau]$

Ex: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$? $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$?

II. Arithmétique dans les anneaux :

1) Caractériser un anneau par les idéaux

Déf : idéal premier [Esc 468]

Prop : $\mathbb{Z}$ premier ssi A/I intègre

Déf : idéal maximal [Esc 468]

Prop : $\mathbb{Z}$ masc $\Leftrightarrow A/I$ corps [P 43]

Prop : masc $\Rightarrow$ premier

Prop : Idéaux d'un corps [P 43]

Prop : i) (0) premier ssi A intègre

ii) :

iii) :

iv) :

v) :

thm
[R 216]

[Esc 469]

2) Divisibilité

Déf : éléments inversibles [Gau]

Prop : $(A^\times; \cdot)$ est un groupe [Gau]

Prop : inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Gau]

Def : divise + déf avec idéaux [Esc 465]

Def : éléments associés

Prop : $a, b \in A$ $a \neq 0$ $b \neq 0$ $(a) = (b)$ ssi a et b assoc
[Esc 465]

Déf: élément premier [Esc 470]

Déf: irréductible [Esc 467]

Prop: représentants des iréd. [Esc 467]

Prop: A intègre, a premier $\Rightarrow a$ iréd. [Esc 470]

Contre-ex: $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$

Prop: A principal. a iréd $\Rightarrow (a)$ est max et premier [Esc 470]

Déf: PPCM

Déf: PGCD

Prop: généralisa^e PPCM, PGCD à familles finies [Esc 465]

Déf: premiers entre eux

Thm: Bézout [R241] + Thm Gauss [R242]

Thm Chinois

3) Anneaux Factoriels et euclidiens

Déf: DPFI [Esc 472]

Déf: Anneau factoriel [Esc 473]

Prop: Dans A fact premier $\Leftrightarrow$ iréd. [Esc 473]

Prop: Principal $\Rightarrow$ Factoriel

Prop: Comparaison des DPF1 dans A fact
[Esc 473]

Def: Anneau euclidien

Prop: euclidien $\Rightarrow$ principal [Esc 471]

Prop: euclidien $\Rightarrow$ unitaire [R 257]

III] Applications:

1) Etude de $\mathbb{Z}$:

Thm de Fermat

Eq. diophantiennes

Ex: impossibilité de $x^3 + y^3 = uz^3$ dans A

21 anneaux de polynômes

Prop: $K[X]$ est principal [R235]

Prop: A commut, unit, intègre

$A[X]$ principal $\Leftrightarrow A$ est un corps

thm (Gauss): A fact $\Rightarrow A[X]$ fact

Déf: contenu

Prop (Lemme de Gauss): $c(PQ) = c(P)c(Q)$

Prop: polyn. irréd de $A[X]$

thm: division euclidienne

thm: scinder un polynôme

PS1