230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

$\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Séries numériques

1.1 Critères de convergence

Définition 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{K}$.*
La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \tag{1}$$

La série est désignée plus simplement par $\sum u_n$. Si elle est convergente, sa limite est notée $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$.

Définition 2. *Le reste d'une série convergente $\sum u_n$ est la quantité définie pour n entier :*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \tag{2}$$

Proposition 3. *Le reste d'une série convergente converge vers 0.*

Proposition 4. *Pour q dans $\mathbf{K}$, la série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.*

1. *Si $|q| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} q^n = \frac{1}{1-q}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.*
2. *Si $|q| > 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

Proposition 5. *Le terme général d'une série convergente est convergent vers 0.*

Contre-exemple 6. *$\sum \frac{1}{n}$ est de terme général convergent vers 0 mais diverge.*

Proposition 7. *Une série $\sum u_n$ converge si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbf{N}, \forall n \geq N_\epsilon, \forall p \in \mathbf{N}, \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \epsilon. \tag{3}$$

1.2 Séries à termes positifs

Proposition 8. *Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.*

Théorème 9. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que pour tout n dans $\mathbf{N}$, $u_n \leq v_n$.*

1. *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*
2. *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n \leq \sum_{n\in\mathbf{N}} v_n$.*

Exemple 10. *Pour n dans $\mathbf{N}$, $\mathrm{e}^{-n^2} \leq \mathrm{e}^{-n}$ donc $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$ converge.*

1.3 Conditions suffisantes

Définition 11. *Une série $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge.*

Proposition 12. *Une série absolument convergente est convergente.*

Théorème 13 ([El 11])**.** *Soit $\sum u_n$ une série et $l = \limsup |u_n|^{\frac{1}{n}}$*

1. *Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.*
2. *Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

Exemple 14. *Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n^{-n}$. Alors $\lim u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$ et donc $\sum u_n$ converge absolument.*

Théorème 15 ([El 11])**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes non nuls à partir d'un certain rang. Soit $L = \limsup \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ et $l = \liminf \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.*

1. *Si $L < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.*
2. *Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

Exemple 16. *Soit x dans $\mathbf{K}$ et pour n dans $\mathbf{N}$, $u_n = \frac{x^n}{n!}$. Alors $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x}{n+1}$. Donc la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge.*

1.4 Opérations sur les séries

Définition 17. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. Leur produit de Cauchy est la série de terme général w_n donné pour $n \in \mathbf{N}$ par :*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \tag{4}$$

Théorème 18 ([Gou20])**.** *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes dont au moins l'une des deux est absolument convergente. Leur produit de Cauchy $\sum w_n$ converge et :*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} w_n = \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbf{N}} v_n\right) \tag{5}$$

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, leur produit de Cauchy converge absolument.

Exemple 19. *Pour tout x et y dans $\mathbf{K}$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.*

2 Comportement asymptotique

2.1 Comparaisons

Théorème 20. *Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ décroissante. La série $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_0^\infty f$ sont de même nature et de plus :*

1. *Si $\sum f(n)$ converge :*
$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt \tag{6}$$
2. *Si $\sum f(n)$ diverge :*
$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n f(t)dt \tag{7}$$

Exemple 21. *La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

1. *Si $0 < \alpha < 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.*
2. *Si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.*
3. *Si $\alpha = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.*

Théorème 22. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que $u_n \sim v_n$.*

1. *Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge et :*
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \tag{8}$$
2. *Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et :*
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k \tag{9}$$

Théorème 23. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que $u_n = o(v_n)$.*

1. *Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge et :*
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right). \tag{10}$$
2. *Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et :*
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right). \tag{11}$$

Développement 1

Application 24 ([FGN], p.142)**.** *Soit $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction continue admettant en 0 le développement limité suivant pour un certain $a > 0$ et $\alpha > 1$:*
$$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha). \tag{12}$$
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle de premier terme $u_0 > 0$ et définie par récurrence pour tout n dans $\mathbf{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour u_0 suffisamment petit, un équivalent de u_n est donné par :
$$u_n \sim (na(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{13}$$
En particulier, si f est donnée par $f : x \mapsto \ln(1+x)$, il existe κ réel tel que :
$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} - \frac{\kappa}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{14}$$

2.2 Contrôle du reste

Définition 25. *Une série $\sum u_n$ est alternée si $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe constant.*

Proposition 26. *Une série alternée $\sum u_n$ telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante convergente vers 0 est convergente.*

Théorème 27. *Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante convergente vers 0.*
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|. \tag{15}$$

Exemple 28. *Soit x dans $]0,1[$ et pur n dans $\mathbf{N}$, $f_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. La série $\sum f_n(x)$ est alternée et converge car $|f_n(x)|$ converge vers 0 de manière décroissante. Donc la majoration du reste est uniforme en x :*
$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n\right\| \leq \frac{1}{n+1} \tag{16}$$

Proposition 29. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ strictement positive décroissante vers 0. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle qu'il existe M positif tel que pour tout $m \geq n \geq 0$, $\left|\sum_{k=n}^{m} v_k\right| \leq M$.*

La série $\sum u_n v_n$ converge et :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k\right| \leq M a_{n+1} \tag{17}$$

Exemple 30 ([Gou20])**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ strictement positive décroissante vers 0. Soit θ dans $\mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})$.*

Alors pour tout $m \geq n \geq 0$:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}. \tag{18}$$

Donc :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{in\theta}\right| \leq \frac{a_{n+1}}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}. \tag{19}$$

La série $\sum a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ converge.

Proposition 31 ([El 11])**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1$.*

Il existe $\alpha \in]0,1[$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que pour $n \leq N$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}. \tag{20}$$

Proposition 32 ([El 11])**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$.*

Il existe $\alpha \in]0,1[$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que pour $n \leq N$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} u_n. \tag{21}$$

3 Séries entières

Définition 33. *Une série entière est une série de fonctions de la variable complexe de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite complexe.*

Proposition 34. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et z_0 dans $\mathbf{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée. Pour tout z dans $\mathbf{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Définition 35. *Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est la quantité dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ définie par $R = \sup\{r \in \mathbf{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.$\}$.*

Proposition 36. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers L dans $\overline{\mathbf{R}}_+$. Le rayon de convergence est alors $R = \frac{1}{L}$*

Proposition 37. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}. \tag{22}$$

Exemple 38. *Le rayon de convergence de $\sum 2^n z^{2n}$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Développement 2

Théorème taubérien faible

Théorème 39 ([Gou20], p.264)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et telle que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Soit f la fonction associée. On suppose qu'il existe $S \in \mathbf{C}$ tel que :*

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = S. \tag{23}$$

Alors $\sum a_n$ converge et :

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n = S \tag{24}$$

Théorème abélien angulaire

Théorème 40 ([Gou20], p.263)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence R au moins 1 telle que $\sum a_n$ converge. Soit θ_0 dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit f la fonction somme :*

$$f\colon \mathrm{D}(0,R) \to \mathbf{C} \tag{25}$$

$$z \mapsto \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n \tag{26}$$

Soit Δ_{θ_0} le secteur donné par :

$$\left\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1 \text{ et } \exists \rho \in \mathbf{R}_+^*, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right\}. \tag{27}$$

Alors :

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n. \tag{28}$$

Contre-exemple 41. $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\in\mathbf{N}} (-1)^n z^n = \frac{1}{2}$ *mais $\sum(-1)^n$ diverge.*

Application 42 ([ZQ20], p.43)**.** *Soit t dans $]0, 2\pi[$.*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2}. \tag{29}$$

Annexe A

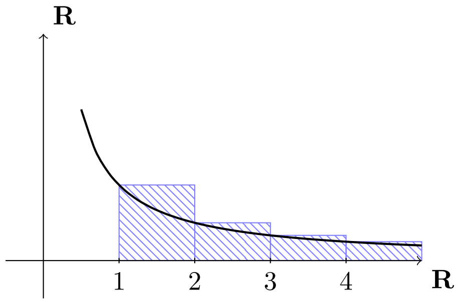

FIGURE 1 – Illustration du théorème de comparaison série-intégrale.

Annexe B

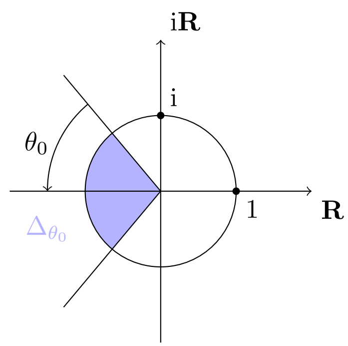

FIGURE 2 – Illustration du secteur de convergence dans le théorème d'Abel.

Références

[El 11] Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions*. Références sciences. Ellipses, nov. 2011. 456 p. ISBN : 9782729870393. URL : `https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html`.

[FGN] Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS. Mathématiques*. 2^{e} éd. T. 3. Cassini. 408 p. ISBN : 9782842252434. URL : `https://store.cassini.fr/gb/enseignement-des-mathematiques/103-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-3.html`.

[Gou20] Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^{e} éd. Ellipses, avr. 2020. 456 p. ISBN : 9782340038561. URL : `https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-20819-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html`.

[ZQ20] Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^{e} éd. Je prépare. Dunod, août 2020. 688 p. ISBN : 9782100811809. URL : `https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques`.