

Lec 20S: Espace complet. ex et appli

I. Espaces complets et suite de Cauchy. (X, d) espace métrique $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$

a) Suite de Cauchy

Def. 1: (x_n) est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0, d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Rmq. 2: la définition revient à dire $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$.

Prop. 3: • Toutes suite convergente est de Cauchy

- Toutes suite de Cauchy est convergente pour d.
- Toutes sous suite de Cauchy est de Cauchy.

Prop. 4: L'image d'une suite de Cauchy par une appli. unif. continue.

Rmq. 5: L'hypothèse d'arc est importante. En effet si $X =]0, +\infty[$ muni l.l., $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est un homéomorphisme de $X \rightarrow X$. $(x_n) = (\frac{1}{n})$ est de Cauchy dans X , mais $(f(x_n)) = (n)$ ne l'est pas.

b) Espace complet

Def. 6: (X, d) est dit complet si toutes suites de Cauchy convergent dans X .

$A \subset X$, est dit complet si A muni de la distance induite est complet.

Ex. 7: $(\mathbb{R}, l.l.)$ est complet.

Prop. 8: (Y, d') espace métrique complet $f: X \rightarrow Y$ homéomorphisme et unif. continue alors X est complet.

Thm. 9: Tout espace métrique compact est complet

Thm. 10: $(A, d) \subset (X, d)$ complet alors A est fermé

Thm. 11: Si $A \subset X$ est fermé et (X, d) complet alors A est fermé

Thm. 12: La réunion de 2 sous espaces complets.

L'intersection quelconque de sous espace complet est

Thm: (Conten) (X, d) complet si (F_n) suites décroissantes de fermé non vide de (X, d) tq $\lim S(F_n) = \emptyset$ alors $\bigcap F_n \neq \emptyset$ $x \in X$.

complet.

Thm. 13: Tout produit fini d'espace métriques complets est complet (pour la distance produit)

Ex. 14: $\mathbb{R}^n$ est complet.

c) Complétion des espaces métriques

Thm. 15: (thm de pop) (Y, d') espace métrique. $A \subset Y$ dense dans Y et $f: A \rightarrow X$ unif. cont. Si (X, d) est complet, f se prolonge de manière unique en une application $\hat{f}: X \rightarrow Y$. De plus $\hat{f}$ est u.c.

Thm. 16: $\exists$ suite $(\hat{X}, \hat{d})$ et $i: X \rightarrow \hat{X}$ tq $i(X)$ dense dans $\hat{X}$ et i isométrique.

- Si (Y, d') est un espace métrique est complet et si il existe $j: X \rightarrow Y$ isométrique tq $j(X)$ soit dense dans Y alors $\exists!$ $P: \hat{X} \rightarrow Y$ tq le diagramme soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & Y \\ i \searrow & & \nearrow P \\ \hat{X} & & \end{array}$$

De plus P est une isométrie de $\hat{X} \rightarrow Y$ $(\hat{X}, \hat{d})$ et (Y, d') sont isométriques.

Rmq. 17: (X, d) et (Y, d') espaces métriques $f: X \rightarrow Y$ u.c. Alors $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ u.c. et le diag. est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{Y} \end{array}$$

Def. 18: $(\hat{X}, \hat{d})$ est appelée complétion de (X, d)

Rmq. 19: 2 distances topologiquement équivalentes n'engendrent pas la même complétion

Ex. 20: $X =]-1, 1[$ $d = l.l.$ $(\hat{X}, \hat{d}) = ([-1, 1], d)$. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$,

[CM03]
p. 80-83

[MFS]
p. 92

[MFS]
p. 98

$f(a) = \frac{a}{\|a\|}$ est homomorphisme $d(a, a') = d(f(a), f(a'))$

d et d' top. eq., f iso de $(X, d) \rightarrow (Y, d')$ complet
 avec $(X, d') = (X, d) = (Y, d)$ car (X, d) et (Y, d) pas homéom.

Ex. 21: $\mathbb{R}$ est complet de $\mathbb{Q}$. $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ complète de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ (pour la crochete de la vue)

II. Exemples d'espaces complet: les espaces de Banach

$(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$ -evm avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

a) Généralités sur les espaces de Banach

Def. 22: On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un Banach si $(E, \|\cdot\|)$ est complet

Ex. 23: $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est complet $p \in [1, \infty]$

• $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ complet $p \in [1, \infty]$

• $(\mathbb{C}(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet

• $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ pas complet.

Thm. 24: Tout evm de dim finie est complet

Prop. 25: $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ 2 evm. $T \mapsto \|T\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F$

est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ (linéaire continue $x \mapsto Tx$)
 Si F est complet $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

Rmq. 26: E^* est un Banach.

b) Espaces L^p : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré

Def. 27: $I^p = \{f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$, $f \in I^p$
 $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

Def. 28: $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\sup(f) := \inf\{M > 0 \mid \mu(\{f > M\}) = 0\}$

$\|f\|_\infty := \sup(f)$ et $I^\infty(\mu) = \{f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \mid \|f\|_\infty < \infty\}$

Def. 29: $L^p := I^p$ $\frac{1}{\|f\|_p} = 0$ $p \in [1, \infty]$

Prop. 30: Hölder + Minkowski

Thm. 31: (Riesz-Fischer) $\forall p \in [1, \infty]$ $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet

c) Espaces de Hilbert

Def. 32: Soit H un $\mathbb{K}$ -ev muni d'un p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit que H est un pré-Hilbertien.

Prop. 33: $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ est une norme appelée norme hilbertienne.

Def. 34: Si H est un espace préhilbertien complet pour sa norme hilbertienne on dit que H est un Hilbert.

Ex. 35: Tout espace préhilbertien de dim. finie est un Hilbert
 $L^2(\mu)$ avec $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\mu$ $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ Hilbert
 $\mathbb{P}_2$ Hilbert.

Thm. 36: H espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H . Alors $\forall x \in H$, $\exists! y \in C$ tq $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C .
 Et $y \in C$, $\operatorname{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C$

Rmq. 37: La complétude H n'est pas essentiel on peut juste supposer C complet.

Prop. 38: $P_C: H \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne.

III Complétude et applications

a) Théorème de point fixe

Thm. 39: (point fixe) (X, d) complet. $f: X \rightarrow X$ k -contractante
 Alors:

- f possède un unique point fixe $a \in X$
- $\forall x \in X$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$ et $d(a, f^n(a)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(a, f(a))$
 $\forall n \geq 0$.

MKS

93

94

Rm of $k \geq 1$ le thm plus vrai, $X = \mathbb{N}$ $f: X \rightarrow X$
 $n \mapsto kn+1$

• Si (X, d) pas complt mdrle pas $X = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ $f: x \mapsto \frac{x}{2}$

Cor. 41: (X, d) complet, $f: X \rightarrow X$ tq $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq

f^p soit contractante, alors:

• f possède un unique point fixe $a \in X$

• $\forall a \in X$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(a) = a$.

+ Cauchy Lip?

b) théorème de Baire et conséquences

(cf L235 (L1) p111 - 115)

ZCHOS
p. 64

ZCHOS
p. 78

Def. : $A \subset X$, le diamètre de A est le terme supérieur de $d(x, y)$ où $x, y \in A$. On note $\delta(A)$.

Prop. : Soient $A_m := \{x_p \mid p \geq m\}$. (x_n) est de Cauchy si $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta(A_m) = 0$.

Références :

[MASS] : El Mague, Masson, Topologie générale et espaces métriques

[LI] : Li, Cours d'Analyse fonctionnelle

[MO] : Choquet, Cours de topologie

[RUD] : Rudin, Analyse réelle et complexe

[BRI] : Boicume, Pages, Théorie de l'intégration