

Leçon: 209: Connexité: ecc et ccpp.

I - Connexité  $(E, d)$  espace métrique et  $(E, d')$  aussi

a) Définitions et premières propriétés

Prop. 1: ABSE

- (i) Il n'existe pas de partition de  $E$  en 2 ouverts disjoints non vides.
- (ii) Il n'existe pas de partition de  $E$  en 2 fermés.

Def. 2: Un espace métrique vérifiant (i) ou (ii) est dit connexe.

Prop. 3:  $A \subset E$  est connexe si un des 2 conditions suivantes est réalisée:

- (i) Si  $A \subset O_1 \cup O_2$  où  $O_1$  et  $O_2$  sont 2 ouverts de  $E$  vérifiant  $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$  alors  $(A \cap O_1 = \emptyset \text{ et } A \subset O_2)$  ou  $(A \cap O_2 = \emptyset \text{ et } A \subset O_1)$
- (ii) Si  $A \subset F_1 \cup F_2$  où  $F_1$  et  $F_2$  sont 2 fermés. ...

b) Stabilité

Thm. 4:  $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$  continue. Si  $E$  est connexe alors  $f(E)$  est connexe.

Thm. 5: (caract. connexe)  $(E, d)$  connexe si pour toutes  $f: E \rightarrow D$  continue alors  $f$  est constante.

Prop. 6:  $A \subset E$  est connexe et si  $A \subset B \subset \bar{A}$  alors  $B$  est connexe.

Thm. 7: Soient  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de connexes d'un espace métrique  $(E, d)$  tq  $\exists i_0 \in I, \forall i \in I, C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ . Alors  $\bigcup_{i \in I} C_i$  est connexe.

Prop. 8: Soient  $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$  des espaces métriques

$E_1 \times \dots \times E_n$  est connexe si  $E_i$  est connexe.

Rmq: l'intersection de 2 connexes n'est pas forcément connexe (fig. 1)

Def. 9:  $x \sim y$  si  $\exists C$  connexe de  $E$  tq  $x \in C$  et  $y \in C$

Prop. 10:  $\sim$  est une relation d'équivalence.

Def. 11: Soit  $x \in E$ , on note sa classe d'équivalence pour  $\sim$   $C(x)$ .  $C(x)$  est appelée composante connexe de  $E$ .

Prop.: (lemme des deux cas)  $A \subset E$ . Toutes parties connexes de  $E$  qui rencontrent l'intérieur de  $A$  et l'extérieur de  $A$  rencontrent aussi la frontière de  $A$ .

Prop. 12:  $C(x)$  est connexe ( $x \in E$ )

Prop. 13: Les composantes connexes de  $E$  forment une partition de  $E$ .

Thm. 14:  $E$  est connexe si  $E$  a qu'une seule composante connexe.

Prop. 15: Les composantes connexes de  $E$  sont fermées.

Si les composantes connexes de  $E$  sont en nombre fini alors elles sont ouvertes.

d) Connexité par arcs

Def. 16: On appelle chemin de  $E$  toutes applications

$\gamma: [0, 1] \rightarrow (E, d)$  continue.  $\gamma([0, 1])$  est appelé arc.  $\gamma(0)$  origine et  $\gamma(1)$  extrémité.

Def. 17: On dit que  $E$  est connexe par arcs si  $\forall a, b \in E$   $\exists$  un arc dans  $E$  d'origine  $a$  et d'extrémité  $b$ .

Thm. 18: Un espace connexe par arcs est connexe.

Rmq. 19: La réciproque est fautive dans certains cas.

Prop. 20: La réciproque est vraie pour un ouvert d'un  $\mathbb{R}^n$ .

III Applications à l'analyse

a) Analyse réel

Thm. 21: Les parties connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Def. 22:  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si  $\forall J \subset I$  intervalle  $f(J)$  est un intervalle.

[GOU]

p. 38

- 41

comme  
les autres  
ici

[GOU]

p. 41  
- 42

[GOU]

p. 41



DANS  
p. 61  
- 65

[GOU]  
p. 46

[FRA]  
p. 86

DEV 1

[BEU]

p. 13  
[GOU]  
p. 323

[GOU]  
p. 359

DEV 2

Thm. 23: Soient  $I$  un intervalle et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ . Alors  $f$  vérifie la ppt des valeurs intermédiaires.

Prop. 24:  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  définie et continue sur  $I$ .  $f$  réalise une bijection de  $I$  dans  $f(I)$  si  $f$  est strictement monotone.

Prop. 25: (Darboux)  $I$  intervalle,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.  $f'$  vérifie la ppt des valeurs intermédiaires.

Prop. 26:  $I$  intervalle,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$  si  
 •  $f$  vérifie la ppt des valeurs intermédiaires  
 •  $\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{y\})$  est un fermé de  $I$ .

Prop. 27:  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f(I)$  est intervalle et  $f$  strictement monotone alors  $f$  est continue.

Lemme 28:  $(E, d)$  espace métrique compact  $(u_n) \subset E$  tq  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$ . L'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  est connexe.

Prop. 29: (Lemme de la grenouille)  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue.  $(u_n) \subset [0, 1]$  tq  $\forall n, f(u_n) = u_{n+1}$ .  $(u_n) \subset V$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ .

b) Calcul différentiel

Thm. 30: Soit  $U \subset E$  connexe,  $f: U \rightarrow F$  différentiable tq  $df(a) \equiv 0 \forall a \in U$ . Alors  $f$  est constante.

Thm. 31:  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace euclidien.  $f: E \rightarrow E$  de classe  $C^1$  tq  $\forall x \in E, df_x$  est une isométrie (ie  $\|df_x(u)\| = \|u\|$ ). Alors  $f$  est une isométrie affine.

c) Analyse complexe

Thm. 32: (prp. analytique) Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $f, g$  holomorphe sur  $U$ . Si  $f, g$  coïncident au voisinage d'un point de  $U$  alors  $f = g$  sur  $U$ .

Rmq. 33: L'hypothèse "coïncident au voisinage d'un point de  $U$ " peut être remplacée par "coïncident sur  $A \subset U$  admettant un point d'accumulation".

Ex. 34:  $f(z) = \frac{1}{z}$  ne s'étend pas analytiquement en  $g: z \mapsto z$  sur  $\mathbb{C}$  car  $A = \{z_n \in \mathbb{C} \mid z_n \neq 0, z_n \rightarrow 0\} \subset \mathbb{C}$  admet point d'acc.

Def. 35:  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $A \subset U$ .  $A$  est dite partie discrète de  $U$  si  $\forall a \in A, \exists r > 0$  tq  $D(a, r) \cap A = \{a\}$ .

Prop/Def. 36:  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $A \subset U$ . ASE:

- (i)  $\forall z \in U$  possède un voisinage  $V$  tq  $V \cap A$  soit fini
- (ii)  $\forall K \subset U$  compact,  $K \cap A$  est fini.
- (iii)  $A$  est une partie discrète et fermée de  $U$ .

Si une de ces assertions est vérifiée on dit que  $A$  est localement finie de  $U$ .

Thm. 37: (Zéros isolés)  $U$  connexe de  $\mathbb{C}$ , et  $f$  holomorphe sur  $U \setminus \{0\}$ .  $Z(f)$  (l'ensemble des zéros de  $f$ ) est une partie localement finie de  $U$ .

[TAU]  
p. 52  
- 53



Def. 38: Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un arc. On dit que  $\gamma$  est fermé si  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .  $\gamma$  est dit simple si il est injectif.

Prop. 39:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un arc.  $\gamma([a, b])$  est une partie compact de  $\mathbb{C}$ .

Thm. 40:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ .  $U: \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$

$\forall z \in U$  on pose:

$$\text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - \gamma}$$

$U \rightarrow \mathbb{C}$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , constante sur chaque comp. connexe de  $U$  et nulle sur celle non bornée.

Def. 41:  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$   $\text{Ind}_\gamma(z)$  est appelée indice de  $z$  par rapport à  $\gamma$

Rmq. 42:  $\text{Ind}_\gamma(z)$  est le "nombre de tours" (compté algébriquement) fait par  $\gamma$  autour de  $z$ .

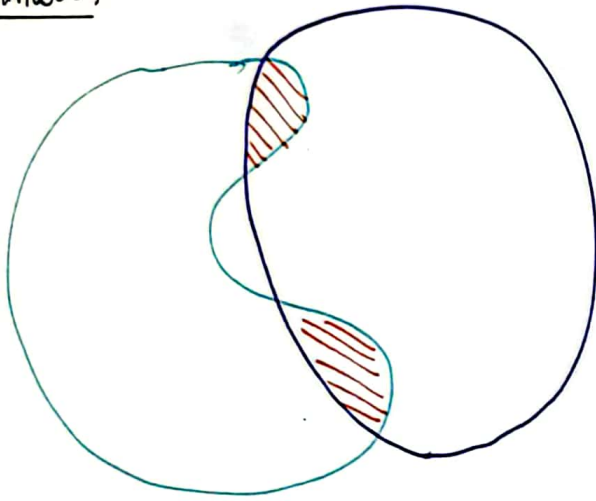
Thm. 43: (Principe du maximum)  $U$  ouvert, connexe, bornée. Si  $f$  est holomorphe sur  $U$  continue sur  $\bar{U}$  alors  $\forall z \in U$ ,  $|f(z)| \leq \sup\{|f(z)| \mid z \in \partial U\}$

Rmq. 44: Si  $\exists u \in U$  tq  $|f(u)| = \sup\{|f(z)| \mid z \in \partial U\}$  alors  $f$  est constante sur  $U$ .

Toutel'ail' peu analyse compl'c, j'en ai pas comment il faut.

Ajouten partie connexité espaces de matrices (surj de l'exp ...)

Annexee:



/// =  $\cap$

Fig. 1

Références:

- [GOU]: Gaudin, Analyse 3ème ed
- [QUE]: Queffelec, Topologie
- [DAN]: Dantzer, Analyse pour l'économiste
- [FRA1]: Frumkin, Analyse 1
- [BEN]: Benjani-Cavage, calcul diff, équ diff
- [TAU]: Tauvel, Analyse complexe pour l'3.