

Leçon 203: Utilisation de la notion de compacité

On considère (E, d) un espace métrique et A une partie de X .

I. Généralités sur la compacité

a) Définitions et premières propriétés

Def. 1: Un recouvrement de X est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de partie de X tq $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Si I est fini on parle de recouvrement fini.

Def. 2: Soit $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X . Soit $S \subset I$ tq $X = \bigcup_{i \in S} A_i$. On dit que $(A_i)_{i \in S}$ est un sous-recouvrement de X . Si S est fini on parle de sous-recouvrement fini.

Def. 3: On dit que X est compact si de tout recouvrement ouvert de X on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Prop. 4: Les ASE:

- X est compact
- De toutes familles de fermés de X dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide.
- Toutes familles de fermés de X dont toute sous-famille finie est d'intersection non vide, est elle-même d'intersection non vide.

Def. 5: On dit que A est compact si, munie de la topologie induit par X A est compact.

Def. 6: A est dit relativement compact si A est compact.

Prop. 7: A est compact si pour toutes familles $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts il existe $S \subset I$ fini tq $A \subset \bigcup_{i \in S} U_i$.

Thm. 8: 1) A est compact alors A est fermé (dans X) et borné.

2) Si X est compact et A fermé dans X alors A est compact.

Cor. 9: 1) Si K compact de X et F fermé de X alors $K \cap F$ est un compact de X .

2) Soient $F_1, \dots, F_n$ sont des parties fermées de X . $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est compact si les F_i sont compacts.

3) L'intersection (quelconque) de compact est compact.

Thm. 10: (Heine) Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact.

Cor. 11: Les parties compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.

b) Le théorème de Bolzano-Weierstrass et conséquences

Def. 12: Soit (a_n) une suite de X . On dit que $a \in X$ est une valeur d'adhérence de (a_n) si $\forall \epsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, d(a_n, a) < \epsilon$.

Prop. 13: Soit (a_n) une suite de X . Les ASE:

- a est une valeur d'adhérence de (a_n) .
- Il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers a .

(iii) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a \in A_p$ où $A_p = \{a_n \mid n \geq p\}$.

(iv) a est un point d'accumulation de $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ou a est un point de répétition de (a_n) . (ie $\{a_n \mid a_n = a\}$ est infini).

L'ensemble des valeurs d'adhérences de (a_n) est $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} A_p$ (donc fermé).

Thm. 14: (Bolzano-Weierstrass) Soit X est compact alors:

1) Pour toutes suites décroissantes $(F_n)_{n \geq 0}$ de fermés de X non vide alors $\bigcap_{n \geq 0} F_n \neq \emptyset$.

2) Toutes suites de X a au moins une valeur d'adhérence.

3) une suite d'éléments de X est convergente si elle a une unique valeur d'adhérence qui est alors sa limite.

4) Toute partie infinie A de X possède au moins un point d'accumulation.

Def. 15: (X, d) est dit précompact si $\forall \epsilon > 0$ il existe un recouvrement de X par des boules de rayon ϵ .

lemme 16: (Lebesgue) Soit (U_i) un recouvrement ouvert de X . Soit toute suite de X alors il existe $r > 0$ tq pour tout $x \in X$, il existe i tq $B(x, r) \subset U_i$.

Thm. 17: Les ASE:

- X est compact.
- X est précompact et complet.
- Toutes suites de X possède une sous-suite cv.

Prop. 18: (X, d) espace métrique compact. (i) une suite d'éléments de X tq $d(u_{n+1}, u_n) \rightarrow 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.

App. 19: $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Soit $(a_n) \subset [0, 1]$ tq $a_{n+1} = f(a_n)$ (a_n) cv si $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

Introduit d'espaces compacts

Thm. 20: Soient $X_1, \dots, X_n$ des espaces métriques.

$\prod_{i=1}^n X_i$ est compact si les X_i sont compacts.

Cor. 21: Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées.

II. Compacité dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Thm. 22: Dans un evn de dim. finie toutes les normes sont équivalentes.

Cor. 23: Toute application linéaire d'un evn de dim. finie dans un evn (de dim. gley) est continue.

Cor. 24: Un evn de dim. finie est complet.

Cor. 25: Tout sev d'un evn de dim. finie est fermé.

CHAS
p. 159
-162

[GOU]
p. 18

CHAS
p. 163
-166

[GOU]
p. 46
DEU

CHAS
p. 26

CHAS
p. 171

CHAS
p. 171 et II
228

[GOU]
p. 50

Cor. 26: Les compacts d'un evm de dim. finie sont les fermés compacts.

[600] p. 56 Thm. 27: La boule unité fermée d'un evm est compact si cette evm est de dim. finie.

III - Fonction continue et compacité

a) Fonctions continues sur un espace compact (Y, d') un espace métrique

Thm. 28: Soit $f: X \rightarrow Y$. On a:

1) Soit A un compact de X , $f(A)$ est un compact de Y

2) Si X est compact et f bijective alors f est un homéomorphisme

Thm. 29: Si X est compact et $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée et atteint ses bornes sur X .

Thm. 30: Soit $f: X \rightarrow Y$ continue. Si X est compact alors f est uniformément continue.

Thm. 31: (Rolle) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.:

(i) f continue sur $[a, b]$

(ii) f dérivable sur $]a, b[$

(iii) $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ t.q. $f'(c) = 0$

Thm. 32: (Accroissement finis) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

(i) f continue sur $[a, b]$

(ii) f dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ t.q. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

b) Théorèmes de points fixes

Thm. 33: Soit $f: X \rightarrow X$. Si X est compact et $\forall x, y \in X, x \neq y$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ alors f admet un unique point fixe.

Rmq. 34: Le résultat est faux si on ne suppose que X complet.

Prendre $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Thm. 35: Soit K un compact convexe d'un evm et $f: K \rightarrow K$ continue t.q. $\forall x, y \in K, \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ alors f admet au moins un point fixe.

Rmq. 36: Plus généralement, on peut montrer que toutes

applications continues d'un convexe compact dans lui-même admet au moins un point fixe (Thm de Brouwer).

c) Espace des fonctions continues sur un compact $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def. 37: On note $C^K(X)$ l'ensemble des fonctions continues de $X \rightarrow K$.

Rmq. 38: $C^K(X)$ est une algèbre associative commutative.

Prop. 39: $(C^1(X), \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach séparable avec $\|f\|_1 = \max\{|f(x)|\}$.

Prop. 40: (Dini) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de $C^0(X)$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f \in C^0(X)$ alors (f_n) converge vers f .

Rmq. 41: L'hypothèse "croissante" peut être "décroissante".

Ex. 42: Définissons la suite (P_n) en $[-1, 1]$ en $P_0 \in [-1, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$. (P_n) converge vers 1.1.

Lemme. 43: On suppose que X contient au moins 2 éléments. Soit $H \subset C^K(X)$ t.q.:

(i) $\forall u, v \in H, \sup(u, v) \in H$ et $\inf(u, v) \in H$.

(ii) Si $x_1, x_2 \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ il existe $u \in H$ t.q. $u(x_1) = \alpha_1$ et $u(x_2) = \alpha_2$.

Alors H est dense dans $C^K(X)$.

Def. 44: Soit $H \subset C(X)$, pour $x_1, x_2 \in X$, si il existe $h \in H$ t.q. $h(x_1) \neq h(x_2)$ alors H est dite séparante.

Si pour tout $f, g \in H, \inf(f, g)$ et $\sup(f, g) \in H$ alors H est dite réticulée.

Thm. 45: Si H est un sev de $C^K(X)$ réticulé, séparant et contenant les constantes, alors H est dense dans $C^K(X)$.

Thm. 46: (Stone Weierstrass, cas réel) Toutes sous algèbres de $C^K(X)$ séparante et contenant les constantes est dense dans $C^K(X)$.

Thm. 47: (Stone Weierstrass, cas complexe) Toutes sous algèbres de $C^K(X)$ séparante et contenant les constantes est dense dans $C^K(X)$ auto-conjugué.

Def. 48: Soit $H \subset C^K(X)$, H est dite auto-conjugué si pour tout $h \in H, \bar{h} \in H$.

Ex. 49: L'ensemble des fonctions lipschitziennes de $X \rightarrow \mathbb{R}$ est dense dans $C^K(X)$.

U003
p.37
-38

Def. S0: $UCC(X)$ est dite équicontinue en $x_0 \in X$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) \leq \eta \Rightarrow \forall h \in U, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

U est dite uniformément équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) \leq \eta \Rightarrow \forall h \in U, |h(x) - h(y)| < \varepsilon$$

Prop. S1: Soit $UCC(X)$. U équicontinue si et seulement si uniformément équicontinue.

Rem. S2: Ça marche bien car X compact.

Prop. S3: Soit (f_n) une suite équicontinue de $C(X)$ et D une partie dense de X . Si $(f_n(x))$ cv pour tout $x \in D$, alors (f_n) cv vers $f \in C(X)$.

Thm. S4: (Ascoli) Une partie de $C(X)$ est relativement compact dans $C(X)$ si elle est bornée et équicontinue.

Commentaires:

- Les thm 20 et cor 2.1 pourraient être mis en place à la fin I. a) pour éviter de faire une partie c) quasiment vide.

- Δ Inverse II. et III. besoins de normes atteintes pour l'équivalence des normes.

- On peut enlever les lemmes avant Weierstrass et mettre thm de Weierstrass en admis.

Références:

[UAS]: Nassim El Kays, topologie dans les evn

[GOU]: Gourdon, Analyse 3 et 4

[FRA]: Francine, Analyse 1 (cours X-ens)

[LIE]: Lierde - Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.