

Leçon 152: Endomorphismes diagonalisables en dim. finie

I - Diagonalisation

a) Polynôme d'endomorphisme E un K -ev de dim. $m \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$

Def. 1: On appelle $K[u]$ la sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u qui est constituée des endomorphismes $v = P(u)$ où $P \in K[X]$.

Prop. 2: $K[u]$ est une algèbre commutative.

Def. 3: Soit $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tq $P(u) = 0$. On dit que P est un polynôme annulateur de u .

Rmq. 4: Ce polynôme existe car $\dim \mathcal{L}(E) = m^2$ et $\{u^k | k \in \{0, \dots, m^2\}\}$ est lié.

Def / Prop. 5: $I_u = \{P \in K[X] | P(u) = 0\}$ est un idéal (non nul). Le générateur de cet idéal est noté π_u et est appelé pol. minimal.

Thm. 6: (Lemme des moyennes) $p_2, p_1, \dots, p_p \in K[X] \setminus \{0\}$ premiers entre eux. Posons $P = \prod_{k=1}^p p_k$. Alors $\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(p_k(u))$. De plus $\pi_u = \text{l.c.m.}(p_1, \dots, p_p) \in K[u]$.

b) Diagonalisation et éléments propres

Def. 7: On dit que u est diagonalisable si il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Def. 8: $x \in E$ est dit vecteur propre de u si, $x \neq 0$ et si $\exists \lambda \in K$ tq $u(x) = \lambda x$. λ est appelée valeur propre associée à x .

Rmq. 9: un vecteur propre est non nul, mais une valeur propre peut être nulle.

Thm. 10: u est diagonalisable si il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Prop. 11: Les valeurs propres de u sont les racines de $\chi_u(X) = \det(u - X \text{id})$ (χ_u est de deg. m)

Def. 12: χ_u est appelé polynôme caractéristique de u .

Prop. 13: Si F ev de E stable par u alors $v = u|_F$ vérifie $\pi_v | \pi_u$

Prop. 14: Soit Q un pol. annulateur de u . Alors l'ensemble des valeurs propres de u sont l'ensemble des racines de Q .

Thm. 15: (Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique de u est pol. annulateur de u .

c) Critère de diagonalisabilité

Def. 16: $E_\lambda = \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$ est appelé sous espace propre associé à λ

Rmq. 17: Si λ n'est pas v.p. $E_\lambda = \{0\}$

Prop. 18: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ distincts, alors $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe

Thm. 19: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (pas forcément distinctes) de u .

ASSE: (i) u diagonalisable (ii) $E = \bigoplus E_{\lambda_i}$ (iii) $\dim(E) = \sum \dim(E_{\lambda_i})$

Cor. 20: Si u admet m vp distinctes alors u est diagonalisable.

Prop. 21: λ vp d'ordre α (ie λ racine d'ordre α de χ_u) alors $\dim(E_\lambda) \leq \alpha$

Thm. 22: u est diagonalisable si χ_u est scindé et si pour toutes valeurs propres λ de u $\dim(E_\lambda) = \alpha$ (avec α l'ordre de la valeur propre λ).

Ex. 13: Diagonaliser $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Prop. 24: $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u \circ v = v \circ u$. Alors tout sous espace propre de u est stable par v et $\text{Im}(u)$ est stable par v .

Thm. 25: Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et $u \circ v = v \circ u$, alors il existe une base commune de diagonalisation de u et v .

Rmq. 26: On peut généraliser ce résultat à une famille quelconque.

II Endomorphismes remarquables

a) Endomorphismes normaux ($E, \langle \cdot, \cdot \rangle$) un espace hermitien, $u \in \mathcal{L}(E)$

Def. 27: u est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$

Ex. 28: matrices symétriques réelles sont normales.

Rmq. 29: u est normal équivaut à $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$ $\forall x, y \in E$

Thm. 30: Si u est normal alors u est diagonalisable et ses sous espaces propres sont $\mathbb{C}^2$ orthogonaux.

Rmq. 31: D'après le théorème de diagonalisation simultanée, u et u^* sont diagonalisables dans une même base.

Thm. 32: ($E, \langle \cdot, \cdot \rangle$) espace euclidien. $u \in \mathcal{L}(E)$ normal alors il existe une base orthonormale tq u se lit de la forme de l'annexe 1.

b) Endomorphismes auto-adjoints

Def. 33: u est dit auto-adjoint si $u^* = u$.

Rmq. 34: C'est un cas particulier d'endomorphisme normal.

Thm. 35: u auto-adjoint alors toutes les vp de u sont réelles

u est diagonalisable et ses sous-espaces propres de u .

Thm 36: $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Alors u est diagonalisable et les sous-espaces propres de u sont 2 à 2 orthogonaux.

c) Endomorphismes unitaire et des isométries

Def. 39: u est appelé endomorphisme unitaire si $\|u(x)\| = \|x\| \forall x \in E$.

Thm 38: Si u est unitaire dans il existe une base orthonormale qui diagonalise u , de plus toutes les valeurs propres sont de module 1.

Cor. 39: La forme matricielle de u dans la base qui le diagonalise est $\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{i\theta_m} \end{pmatrix}$

Def. 40: $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace euclidien. $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit isométrie si $\|u(x)\| = \|x\| \forall x \in E$.

Thm 41: $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace euclidien. $u \in \mathcal{L}(E)$ isométrie. Alors il existe une base orthonormale de E tq la matrice de u dans cette base soit de la forme

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & R(\theta_r) \end{pmatrix} \text{ où } \forall j \in \{1, \dots, r\} \exists \theta_j \in]-\pi, \pi[\text{ et } \forall i \in \{1, \dots, r\} R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$$

III. Applications

a) Décomposition Dunford

Lemme 42: $u \in \mathcal{L}(E)$, $f \in K[x]$ un pol. annulateur de u . $f = f_1^{a_1} \dots f_r^{a_r}$ sa décomposition en irréductible. $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ notons $N_i = \ker f_i^{a_i}(u)$. On a alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_r$ et $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un pol. en u .

Thm 43: (Décomposition de Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\exists u$ soit scindé sur K . $\exists (d, m) \in \mathcal{L}(E)$ tq

• d est diagonalisable, m est nilpotent

• $u = d + m$ et $dm = md$

De plus d et m sont des pol. en u .

c) Calcul de puissance et diagonalisation par blocs

Prop. 44: $A \in M_n(K)$ diagonalisable tq $A = P A' P^{-1}$ (avec A' diagonale)

Alors $A^k = P (A')^k P^{-1}$.

Si $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $(A')^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ et donc $A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$

Ex. 45: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ calculer $\forall k \in \mathbb{N}$ A^k .

Thm 46: (Réduction par blocs). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq

$$\chi_u(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{a_1} \dots (x - \lambda_p)^{a_p} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j)$$

Alors il existe une base B de E $B = \{B_1, \dots, B_p\}$ où

B_i est une base de $\ker(u - \lambda_i \text{Id})^{a_i}$ tq la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & (*) & & (0) \\ & \ddots & & \\ (0) & & & \lambda_p & (*) \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \lambda_p \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \lambda_i & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ est la matrice de } u|_{\ker(u - \lambda_i \text{Id})^{a_i}} \text{ dans la base } B_i.$$

Prop. 47: Soit A tq $\exists A$ est scindé tq $A = P A' P^{-1}$ avec A' diagonale par blocs. Alors $A^k = P (A')^k P^{-1}$ et

$$(A')^k = \begin{pmatrix} M_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_p^k \end{pmatrix}$$

DEV 2

[6005

p.204

-205

[6005

p.70

[6005

p.186

-190

Exe. 48: Résoudre $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 4y_n \end{cases}$ tq $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

d) Exponentielle de matrice:

E un K -ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ $\|u\| = \sup \|u(x)\|$, $\|u\|$ est une norme d'algèbre.

Def. 49: $u \in \mathcal{L}(E)$ $e^u := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$

Prop. 50: $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in \mathcal{L}(E)$ inversible $e^{v^{-1}uv} = v^{-1}e^u v$

Prop. 51: $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tq $uv = vu$ alors $e^{u+v} = e^u e^v = e^v e^u$

Thm 52: $u \in \mathcal{L}(E)$ tq u est séparable et $u = d + n$ sa décomposition de Dunford $e^u = e^d e^n$

Ajouter de [POM] partie exp. de Dunford seulement mieux.
A voir qd j'aurais fait le d.

Lemme: $p \geq 2$, $p_1, \dots, p_p \in K[x]$, $k \in \{1, \dots, p\}$ posons $Q_k = \prod_{j \neq k} p_j$. Si les p_k sont 1^{er} entre eux 2 à 2 alors les Q_k sont 1^{er} dans leurs ensembles, de plus p_k et Q_k sont premiers entre eux

Thm: (Lemme des racines) $p \geq 2$ $p_1, \dots, p_p \in K[x]$ 1^{er} entre eux 2 à 2. Posons $P = \prod_{k=1}^p p_k$. Alors $\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(p_k(u))$

De plus $\pi_k: \ker(P(u)) \rightarrow \ker(p_k(u))$ sont dans $K[u]$

Thm: ASS

- (i) u est diagonalisable
- (ii) il existe un pol. annulateur de u séparable à racines simples
- (iii) π_k est séparable à racines simples

DEV 1

[POM]

p. 558

600

600

p. 18

Références:

- [ROM]: Rombaldi, mathématiques algèbre
[GRI]: Grifone, algèbre linéaire
[GOU]: Gaudier, algèbre et proba
[MAN]: Mamsouy, algèbre linéaire diag. des endo.

Commentaires:

- La partie **Ia)** peut être faite dans [MAN] (~ p.1- p.4)
- Pareil pour **Ib)** (~ p.51-54) et mettre le lemme des noyaux
- Pareil pour **Ic)** juste mettre le critère de [GOU] pour dev
- **II. a)** peut tout être pris dans [GOU] (p.220)
- A la fin de **II.** on peut ajouter une partie sur endo. semi-simple ([GOU] p.236)

Annexe:

①
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & (0) \\ (0) & & & z_1 & \ddots & \\ & & & & & z_d \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \forall i, \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \forall j \in \{1, \dots, d\}, z_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \end{array}$$