

150: Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

Soit E un K -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On pose $\mathcal{L}(E)$

I- Polynômes d'endomorphismes

a) L'algèbre $K[E]$

Def. 1: Les puissances (de composition) de u sont les endomorphismes de E définis récursivement par $u^0 = Id$ et pour $k \in \mathbb{N}$ $u^{k+1} = u \circ u^k$.
 Pour $P \in K[X]$ tq $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ on définit $P(u)$ par $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$.

Prop. 2: Soient $P, Q \in K[X]$, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent

Prop. 3: L'application $P \in K[X] \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre. L'image de ce morphisme est noté $K[u]$ qui est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Rmq. 4: Pour $A \in M_n(K)$ on définit également $P(A)$. $P(A)$ est la matrice de $P(u)$ dans une certaine base.

b) Polynômes annulateurs et minimale

Rmq. 5: $\mathcal{L}(E)$ est de dim. n^2 donc la famille $(u^0, \dots, u^{n^2})$ est liée donc il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tq $P(u) = 0$.

Def. 6: Soit $P \in K[X] \setminus \{0\}$, si $P(u) = 0$ alors P est dit annulateur. On note $I_u = \{P \in K[X] \mid P(u) = 0\}$

Def. 7: I_u est un idéal de $K[X]$ (principal) donc I_u admet un unique générateur π_u . On appelle π_u le polynôme minimal de u .

Rmq. 8: π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré annulant u .

Thm. 9: $\dim K[u] = \deg \pi_u$

Thm. 10: $K[u]$ est un corps si $K[u]$ intègre si π_u irréductible

Def. 11: Soit F un sous espace stable par u de E . L'endomorphisme induit sur F est noté u_F .

Prop. 12: Soit F un sous espace stable par u de E . Alors $\pi_{u_F} \mid \pi_u$.

c) Polynômes caractéristiques

On note A la matrice de u dans une certaine base B .

Def. 13: On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme

$$\chi_A = \det(XI_n - A)$$

Prop. 14: Deux matrices semblables ont même pol. caractéristique.

Prop. 15: χ_u est le polynôme de n importe quelle matrice de u .

Prop. 16: Soit F un sous espace stable par u de E , on a $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Prop. 17: Si $G = F \oplus G$ où F, G sont des sous espaces stables par u , alors $\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$.

Prop. 18: Les racines de χ_u sont exactement les vp. de u .

Thm. 19: (Cayley-Hamilton) χ_u est un annulateur de u .

II- Réduction d'endomorphismes

a) Diagonalisation

Prop. 19: Si u admet n valeurs propres 2 à 2 distinctes alors u est diagonalisable.

Prop. 20: Si χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable.

Thm. 21: (Lemme des moyennes) Soit $P = P_1 \dots P_k \in K[X]$ où tous les P_i sont premiers entre eux 2 à 2. Alors

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker } P_i(u)$$

Thm. 22: u est diagonalisable si il existe $P \in K[X]$ tq $P(u) = 0$ et P scindé à racines simples.

Thm. 23: u est diagonalisable si π_u est scindé à racines simples.

Thm. 24: Soit F un sous espace stable par u de E . Si u est diagonalisable alors u_F est diagonalisable.

Thm. 25: u est diagonalisable si χ_u est scindé et la dimension de chaque sous espace propre est égal à la multiplicité de la valeur propre dans χ_u .

Cor. 26: u est diagonalisable si la somme des dimensions des sous espaces propre vaut $\dim(E)$.

Thm. 27: Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonaux. Si pour $i, j \in I$ $u_i u_j = u_j u_i$, alors on peut les diagonaliser.

simultanément tous les u_i .

b) Trigonalisation

Thm. 29: u est trigonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé.

Cor. 29: u est trigonalisable ssi π_u est scindé

Cor. 30: Soit F un sous-espace stable par u de E .

Si u est trigonalisable alors $u|_F$ est trigonalisable

Thm. 31: Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables t_q pour $i, j \in I$ u_i, u_j commutent. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est co-trigonalisable.

c) Décomposition de Dunford

Lemme 32: Soit $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de u .

Notons $P = \prod_{i=1}^d M_i^{a_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles de $K[X]$. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$ on note $V_i = \text{Ker } M_i^{a_i}(u)$.

Alors $E = \bigoplus_{i=1}^d V_i$ et la projection sur V_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} V_j$ est un polynôme en u .

Thm. 33: (Décomposition de Dunford)

Si χ_u est scindé sur K , alors il existe un unique couple (d, m) d'endomorphismes t_q :

(i) d est diagonalisable et m nilpotente

(ii) $u = d + m$ et $\text{dom} = m \circ d$

De plus d et m sont des polynômes en u .

Méthode 34: (Calcul de la décomposition de Dunford)

Objectif: calculer les projecteurs:

On note $\chi_u = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{r_i}$ on fait la DSE $\frac{1}{\chi_u}$:

$$\frac{1}{\chi_u} = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{i,j}}{(x - \lambda_i)^j} \right)$$

on pose $u_i = \sum_{j=1}^{r_i} a_{i,j} (x - \lambda_i)^{r_i-j} \quad t_q$

$$\frac{1}{\chi_u} = \sum_{i=1}^r \frac{u_i}{(x - \lambda_i)^{r_i}} \quad \text{ou encore } 1 = \sum_{i=1}^r u_i Q_i \quad \text{où}$$

$$Q_i = \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{r_j}. \quad \text{Ainsi les } P_i Q_i \text{ sont nos projecteurs.}$$

Rmq. 35: Pour simplifier les calculs, on est pas obligé de prendre χ_u mais un polynôme annulateur, π_u convient.

III - Applications

a) Calcul de puissances et diagonalisation par blocs

Méthode 36:

Diagonaliser permet de calculer facilement des puissances.

Soit $A \in M_n(K)$ diagonalisable, on a qu'il existe

$$P \in GL_n(K) \quad t_q \quad A = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$$

$$\text{Or } A^k = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P$$

$$= P^{-1} \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P$$

Ex. 37: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 2^k - 3^k \\ -2^{k+1} + 2 \times 3^k & -2^k + 2 \times 3^k \end{pmatrix}$

Rmq. 38: Une application du calcul de puissance est la résolution d'un système de suites récurrentes

Méthode 39: Si on a un système $X_{n+1} = A X_n$ alors $X_n = A^n X_0$ de suites récurrentes

Ex. 40: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 5v_n \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$ posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ on a $X_n = A^n X_0$ le calcul de A^n est fait dans l'ex. 37.

Lemme. 41: Si $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ où les E_i sont des sous espaces vectoriels stables par u . Si $B_1, \dots, B_p$ sont des bases de $E_1, \dots, E_p$ on a:

$$\text{Mat}_{(B_1 \dots B_p)}(u) = \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_p \end{pmatrix} \text{ où } M_i = \text{Mat}_{B_i}|_{E_i}$$

Thm. 42: (Réduction par blocs) Si λ_u est scindé, alors le $(-1)^n (x - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (x - \lambda_p)^{\alpha_p}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pp existe une base B où $B = (B_1 \dots B_p)$ où B_i est une base de $\text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}$ et q

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & (*) \\ (0) & \lambda_1 \end{matrix} & & (0) \\ \xleftarrow{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha_p} & \lambda_p & (*) \\ & \lambda_p & \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} \lambda_i & (*) \\ (0) & \lambda_i \end{pmatrix} = \text{Mat}_{B_i}(u|_{\text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}})$$

b) Exponentielle d'endomorphismes $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Prop. 43: Soit $\sum a_k z^k$ une série entière où $a_k \in \mathbb{K}$ et $R > 0$ son rayon de convergence.

Si $|p(u)| < R$ alors la série de terme général $a_k u^k$ converge normalement.

Si $|p(u)| > R$ elle diverge.

Thm. 44: Si $|p(u)| < R$ on note $f(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ alors f est un polynôme en u .

Def. 45: $\sum \frac{1}{k!} u^k$ est convergente pour tout $u \in \mathcal{I}(E)$. On note $\exp(u)$ sa somme (ou e^u).

Thm. 46: $\exp: \mathcal{I}(E) \rightarrow \mathcal{I}(E)$ est continue.

Rmq. 47: On définit de manière analogue l'exponentielle de matrice.

Prop. 48: On a les propriétés suivantes

(i) $e^0 = \text{Id}$.

(ii) e^u est un polynôme en u .

(iii) Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\exp(A) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

(iv) Si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables alors e^A et e^B sont semblables

(v) $t \mapsto e^{tA}$ est C^∞ sa dérivée est $t \mapsto A e^{tA}$.

Thm. 49: $\det(e^u) = e^{\text{tr}(u)}$ et e^u est inversible.

Thm. 50: $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^+(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Thm. 51: (Dunford pour l'exponentielle de matrice)

Si λ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, on note $A = D + V$ sa décomposition de Dunford où D est diagonalisable et V nilpotent. Alors la décomposition de Dunford de e^A est $e^D + e^D(e^V - \text{Id}_n)$ où e^D est diagonalisable et $e^D(e^V - \text{Id}_n)$ nilpotent.

Cor. 52: Si λ_A est scindé on a:

e^A diagonalisable si A diagonalisable.

Commentaires

- Ajouter endo. cyclique cf [HAM]

- Dans application ajouter $\text{Id}_n(\mathbb{F}_q)$, mettre les dessins de matrices en annexe. Faire $\text{Id}_n(\mathbb{F}_q)$ on dev. à la place de lemme des majorants