NOM : CHANFI Prénom : Doriane Jury : B. Winckler

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie - Orthogonalité isotropie. Applications.

Autre sujet :

Réf : Artin : Algèbre géométrique. Schankler : Quadratic and Hermitian Forms
Caldero - Germoni : H2G2, vol 1 Serre : Cours d'arithmétique

Sauf mention du contraire, la lettre K désignera dans la suite un corps de caractéristique différente de 2

I - Formes quadratiques, algèbre bilinéaire et dualité.

1) Espaces quadratiques

Déf 1 : Soit V un K-ev de dimension finie. Une forme quadratique sur V est une application $q : V \to K$ telle que :

(i) $\forall \lambda \in K\ \forall v \in V\ q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$

(ii) l'application $B_q : V \times V \to K$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est bilinéaire.

On l'appelle forme polaire de q.

On note $Q(V)$ l'ensemble des formes quadratiques sur V.

On appelle espace quadratique un couple (V,q) avec $q \in Q(V)$.

Ex 2 : • Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $q : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ est une forme quadratique sur K^n.

• $A \mapsto Tr(A^2)$ et $A \mapsto Tr({}^tAA)$ sont des f.q. sur $M_n(K)$

• $\det$ est une f.q. sur $M_2(K)$

• Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est C^2 et $x_0 \in U$, alors $\forall v \mapsto d^2f(x_0)(v,v)$ est une forme quadratique sur $T_{x_0}U \simeq \mathbb{R}^n$.

Prop 3 : $Q(V)$ forme un sev de $\mathcal{F}(V,K)$ isomorphe à celui des formes bilinéaires symétriques sur $V \times V$ via l'assignation $q \mapsto B_q$.

Cor 4 : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de V, alors l'application $q \mapsto \underbrace{(B_q(e_i,e_j))_{1 \le i,j \le n}}_{Mat_{\mathcal{B}}(q)}$ réalise un isomorphisme de $Q(V)$ vers $S_n(K)$.

On appelle rang de q le rang de $Mat_{\mathcal{B}}(q)$.

Ex 5 : • Si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de K^n, $\alpha \in K^n$, on a $Mat_{\mathcal{B}}(q_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$

• Si $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21})$, on a $Mat_{\mathcal{B}}(\det) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Prop 6 : Si $X \in \underset{M_{n,1}(K)}{K^n}$ est le vecteur des coordonnées de $x \in V$ dans la base $\mathcal{B}$, alors $q(x) = {}^tX\, Mat_{\mathcal{B}}(q)\, X$.

Si $f \in \mathcal{L}(V)$, on a $Mat_{\mathcal{B}}(q \circ f) = {}^tMat_{\mathcal{B}}(f)\, Mat_{\mathcal{B}}(q)\, Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Déf 7 : Une isométrie d'un espace quadratique (V,q) vers (V',q') est une application linéaire injective $f : V \to V'$ telle que $q = q' \circ f$.

Si f est bijective, les espaces sont dits isométriques.

Ex 8 : L'inclusion $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot,\cdot \rangle) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot,\cdot \rangle)$, $(x,y) \mapsto (x,y,0)$ est une isométrie.

Déf 9 : Deux formes quadratiques $q, q' \in Q(V)$ sont dites équivalentes si (V,q) et (V,q') sont isométriques, ou, si leurs matrices dans une base donnée sont congruentes.

Prop-déf 10 : Le discriminant $disc(q) = [\det Mat_{\mathcal{B}}\, q] \in K^\times/(K^\times)^2$ est préservé par équivalence des formes quadratiques.

2) Orthogonalité

Déf 11 : Soit (V,q) un espace quadratique. On définit une application linéaire $\Phi : V \to V^*$, $x \mapsto B_q(x, \cdot)$ et on note $rad\, V$ le noyau de Φ.

On dit que q est non dégénérée si et seulement si $rad\, V = \{0\}$.

Prop 12 : Si $\mathcal{B}$ est une base de V, q est non dégénérée ssi $Mat_{\mathcal{B}}(q)$ est inversible.

Ex 13 : $A \mapsto Tr(A^2)$ et $A \mapsto Tr({}^tAA)$ sont non dégénérées.

Déf 14 : Deux vecteurs $x, y \in V$ sont dits orthogonaux $(x \perp y)$ si $B_q(x,y) = 0$.

Si $S \subset V$, on note $S^\perp = \{x \in V \mid \forall s \in S\ x \perp s\}$.

Si V_1 et V_2 sont supplémentaires dans V et $V_1 = V_2^\perp$, on note $V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2$.

Rq 15 : On a $S^\perp = \Phi(S)^\perp$ (ici au sens de la dualité) et $\mathrm{rad} V = V^\perp$.

Prop 16 : q définit canoniquement une forme quadratique non dégénérée sur $V/\mathrm{rad} V$, isométrique à tout supplémentaire de $\mathrm{rad} V$. Si U est un tel supplémentaire, on a $V = \mathrm{rad} V \overset{\perp}{\oplus} U$.

Prop 17 : Soit (V, q) un espace non dégénéré et W un sev de V.
On a
- $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$
- $(W, q_{|W})$ est non dégénéré ssi $V = W \overset{\perp}{\oplus} W^\perp$

Déf 18 : Un vecteur $x \in V$ est dit isotrope si $q(x) = 0$ (i.e. $x \perp x$).
On note $C(q)$ et on appelle cône isotrope l'ensemble des vecteurs isotropes.
Un espace (V, q) est dit isotrope s'il admet des vecteurs isotropes non nuls et anisotrope sinon. Il est dit totalement isotrope si $q = 0$.

Rq 19 : $C(q)$ est un cône de V ... (cf. annexe)

Ex 20 :
- $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est anisotrope mais $(\mathbb{R}^2, q)$ est isotrope pour $q(x,y) = x^2 - y^2$
- $\det_{|\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr} M = 0\}}$ a pour cône isotrope le cône nilpotent de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Prop 21 : Soit (V, q) non dégénéré et $x \in V \setminus \{0\}$ isotrope. Alors, il existe $y \in V$ tel que $\begin{cases} \varphi(x, y) \neq 0 \\ q(y) = 0 \end{cases}$.

Prop-Déf 22 : Un tel plan est appelé plan hyperbolique et une somme directe orthogonale de tels plans un espace hyperbolique. Deux espaces hyperboliques de même dimension sont isométriques.

Cor 23 : Tout espace (V, q) s'écrit sous la forme $V = \mathrm{rad} V \overset{\perp}{\oplus} H \overset{\perp}{\oplus} W$ où H est hyperbolique et W anisotrope.

3) Bases orthogonales et applications

Déf 24 : Une base orthogonale de (V, q) est une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $B(e_i, e_j) = 0$ pour tous i, j distincts.

Prop 25 : Tout espace quadratique admet une base orthogonale.

Cor 26 (Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_q$) :
- le rang est un invariant total d'isométrie des formes quadratiques sur un $\mathbb{C}$-ev V.
- Si V est un $\mathbb{R}$-ev et $q \in Q(V)$, alors il existe un unique couple (r, s) tel que q soit équivalente à $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{j=r+1}^{r+s} x_j^2$. Le couple (r, s) est un invariant total pour l'équivalence sur $Q(V)$.
- Si V est un $\mathbb{F}_q$-ev, le rang et le discriminant fournissent un système total d'invariants pour l'équivalence sur $Q(V)$.

App 27 : Soient p, q premiers impairs distincts. On a $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)}$ où $\left(\frac{p}{q}\right)$ désigne le symbole de Legendre. || DVT 1

III - Groupe orthogonal
1) Éléments de structure

Déf 28 : Si (V, q) est un espace quadratique, on note $O(V, q)$ l'ensemble des isométries de (V, q) vers lui-même. On note $SO(V, q) = O(V, q) \cap SL(V)$.

Prop 29 : $O(V, q)$ est un sous-groupe de $GL(V)$.

Déf 30 : Si $x \in V$ n'est pas isotrope, alors l'application linéaire s_x définie par $s_x(x) = -x$ et $s_{x|x^\perp} = id$ est une isométrie de V appelée réflexion d'axe $x^\perp$.
Si $P \subset V$ est un plan non dégénéré, l'application linéaire r_P définie par $r_{P|P} = -id$ et $r_{P|P^\perp} = id$ est une isométrie appelée retournement.

__Prop 31__ : Les réflexions engendrent $O(V,q)$.
Les retournements engendrent $SO(V,q)$ si $\dim V \geq 3$.

__Cor 32__ : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs pour tout $n \geq 1$.
$O_n(\mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes pour $n \geq 1$.
$O_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $O_n(\mathbb{R})$.

2) Action sur les quadriques et le cône isotrope

__Lemme 33__ : Soient (V,q) et (V',q') deux espaces quadratiques non dégénérés, $W \subset V$ un sev et $f : W \to V'$ une isométrie. Si W est dégénéré, alors on peut étendre f en $\tilde{f} : W_1 \to V'$ où W_1 contient W comme hyperplan.

__Théorème 34 (Witt)__ : Si (V,q) et (V',q') sont deux espaces non dégénérés isométriques, toute isométrie $f : W \to V'$ s'étend en une isométrie de V sur V'.

__Corollaire 35__ : $O(V,q)$ agit transitivement sur $C(q) \setminus \{0\}$.

__Def 36__ : On appelle __quadrique__ de V les surfaces de niveau
$$q_\delta = \{x \in V \mid q(x) = \delta\}.$$

__Prop 37__ : Si V est un $\mathbb{R}$-ev de dim finie et q une forme non dégénérée, alors pour tout $\delta \neq 0$, q_δ est une sous-variété de codimension 1 de V et pour $x \in q_\delta$, $T_x q_\delta = x^\perp$. (cf. annexe 2)

__Prop 38__ : $O(V,q)$ agit transitivement sur chaque q_δ, $\delta \neq 0$.

3) Décomposition polaire des groupes orthogonaux réels.

__Def 39__ : On note $O(p,q)$ le groupe orthogonal de la forme standard $(x_1, \dots, x_{p+q}) \mapsto \sum_{j=1}^{p} x_j^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2$. On note $O(n) = O(n,0)$.

__Théorème 40__ : Si $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe linéaire stable par transposition tel que $G \cap S_n^{++}$ soit stable par passage à la racine carrée, alors on a l'homéomorphisme
$$G \simeq (G \cap S_n^{++}) \times (G \cap O(n)).$$
$$g \longmapsto \left(\sqrt{{}^t g g},\ g\left(\sqrt{{}^t g g}\right)^{-1}\right)$$

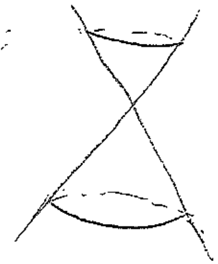
__Corollaire 41__ : $O(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

__Prop 42__ : On a l'homéomorphisme $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ si $p,q \geq 1$. DEV 2

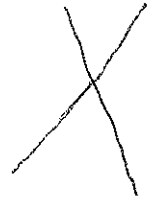
__Corollaire 43__ : $O(p,q)$ a 2 ou 4 composantes connexes.
__Corollaire 44__ : Une quadrique réelle a au plus 4 composantes connexes. (cf. annexe 3)

Fig. 1 :

$C(2,1)$:

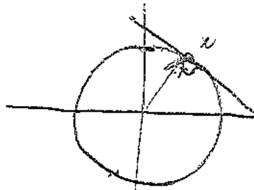


$C(1,1)$

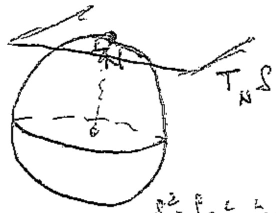


$C(3,0)$: .

Fig. 2 :



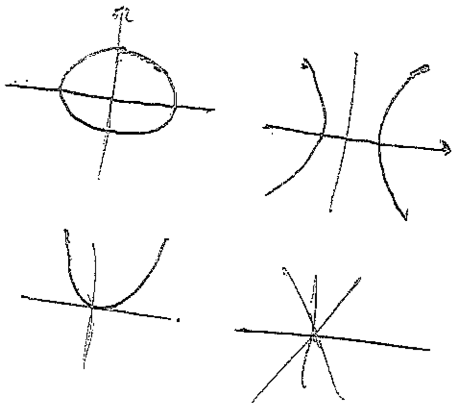
$S^1 = \{x^2+y^2=1\}$



$S^2 = \{x^2+y^2+z^2=1\}$

Fig 3 : Quelques exemples de quadriques :

dim 2,



dim 3 :