1/3

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

← erreur discret !

(I) Variables aléatoires discrètes : généralités

E ensemble fini ou dénombrable,
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité :

Déf - Proposition 1

- Une variable aléatoire (v.a) discrète est une application mesurable $X : \Omega \to E$.
- La loi de X est la mesure de proba sur $(E, \mathcal{P}(E))$: $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A)$. Par lemme des classes monotones, la loi est caractérisée par $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$.
- Dans le cas où $E \subset \mathbb{C}$ (par ex. : $E = \mathbb{N}$), on peut utiliser la théorie de l'intégration, avec toutes les considérations relatives aux espaces $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

. **Notation** : Soit $X : \Omega \to E$ v.a. Quand c'est défini (par ex : $X \geq 0$, $X \in L^1$, $X \in L^2$) : $\to \int X d\mathbb{P} = E[X]$
$\to E[X^2] - E[X] = Var(X)$

. On a par exemple comme résultat :
(Markov) $X \geq 0$. $\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{E[X^k]}{x^k}$, $x > 0$.

Déf - Prop. 2 (Indépendance)

$X_1, \dots, X_n : \Omega \to E$ v.a discrètes sont indépendantes

ssi $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(E)$, $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$

ssi $\forall x_1, \dots, x_n \in E$, $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$

ssi $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$

- $(X_n)_{n \geq 0}$ suite de v.a discrète sont indépendantes si $\forall J \subset \mathbb{N}$ fini, $(X_j)_{j \in J}$ sont indépendantes.

Déf. 3 (Fonctions génératrices)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la série formelle : $g_X(Z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) Z^n = E[Z^X]$

Proposition 4 $X : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a discrète. g_X est une série entière de rayon de $CV \geq 1$, définie sur $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.
De plus, g_X caractérise la loi de X : $\frac{g_X^{(n)}(0)}{n!} = \mathbb{P}(X = n)$

Enfin, $X \in L^p$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ssi g_X est p fois dérivable à gauche en 1, et alors $g_X^{(n)}(1^-) = E[X(X-1) \dots (X-n+1)]$.

Cor. 5 $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a à valeurs ds $\mathbb{N}$ indépendantes ssi $g_{X_1 + \dots + X_n}(z) = g_{X_1}(z) \dots g_{X_n}(z)$

App. 6 : Processus de branchement

μ loi sur $\mathbb{N}$ tq $\mu(1) < 1$ et $m = \sum_{n \geq 0} n \mu(n) < \infty$

$(\xi_{n,j})_{n \geq 0, j \geq 1}$ v.a discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi μ

: $Z_0 = 1$, $Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \xi_{n,j}$, $n \geq 0$

$\mathcal{E} = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \geq 1, Z_n(\omega) = 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{Z_n = 0\}$
événement d'extinction.

- Alors : . $m \leq 1$: $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = 1$ / $m > 1$: $\mathbb{P}(\mathcal{E}) < 1$.
  - $m > 1$ ou $m < 1$: $\mathbb{P}(Z_n = 0) \nearrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ exponentiellement vite
  - $m = 1$ avec en plus $\sigma^2 = \sum_{k \geq 0} k^2 \mu(k) - m^2 < \infty$: $\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n}$.

Déf 7 (Convergence en loi)

$(X_n : \Omega \to E)_{n \geq 0}$; $X : \Omega \to E$: $X_n \xrightarrow{loi} X \iff \mathbb{P}(X_n = x) \to \mathbb{P}(X = x)$ $\forall x \in E$.

Prop. 8 :
$X_n \xrightarrow[loi]{} X \iff g_{X_n} \to g_X$ dans $\mathbb{C}[Z]$

Exemples 9

1) Loi uniforme sur E, $|E| < \infty$: $\mathbb{P}_X = \sum_{x \in E} \frac{\delta_x}{|E|}$.

PT 1

2) Bernoulli $\mathcal{B}er(p)$: $\begin{cases} \mathbb{P}_{Ber(p)} = p\delta_1 + (1-p)\delta_0 \\ g_{Ber(p)} = (1-p) + pz \end{cases}$ [Pile ou face, "biaisé" si $p \neq 1/2$]

3) Binomiale $Bin(n,p)$: $\begin{cases} \mathbb{P}_{Bin(n,p)} = \sum_{k=0}^{n} p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{k}\delta_k \\ g_{Bin(n,p)} = g_{Ber(p)}^{\,n} \end{cases}$ [# {Piles} dans n Bernoulli]

4) Géom(p) : $\begin{cases} \mathbb{P}_{Géom(p)} = \sum_{k>0} p(1-p)^{k-1}\delta_k \\ g_{Géom(p)} = \frac{p}{1-p}\left[\frac{1}{1-z(1-p)} - 1\right] \end{cases}$ [temps du 1er pile]

5) Poisson(λ) : $\begin{cases} \mathbb{P}_{P(\lambda)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\delta_k \\ g_{P(\lambda)} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} \end{cases}$

Théorème 10 (Evènements rares de Poisson)

Soit $(A_{n,j})_{1\leq j\leq m_n}^{n\geq 0}$ famille d'évènements indép.

On note $p_{n,j} = \mathbb{P}(A_{n,j})$ et $S_n = \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$.

Si $\max_{1\leq j\leq m_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\sum_{j=1}^{m_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$, alors :

$$S_n \xrightarrow{loi} P(\lambda)$$

Cor. 11 Si $X_n : \Omega \to \mathbb{N} \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $np_n \to \lambda$, on a :
$$X_n \xrightarrow{loi} P(\lambda)$$

II. Chaînes de Markov E espace d'état fini ou dénombrable

1) chaînes de Markov

Théorème 12 (Espérance conditionnelle)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de proba. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sous-tribu. $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Alors il existe une unique v.a. dans $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, notée $E[X|\mathcal{G}]$ tq : $\forall Y$ bornée $\mathcal{G}$-mes. : $E[XY] = E[E[X|\mathcal{G}]Y]$.

Rq 13 : $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, $X \mapsto E[X|\mathcal{G}]$ est une isométrie linéaire positive : ceci permet de généraliser à peu près tous les résultats usuels d'intégration (CV ↗, Fatou, CVD, inégalité < Jensen, Cauchy-Schwarz)

Déf 14 On appelle matrice de transition, abrégée m.t, une application $Q : E \times E \to \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in E$ $\sum_y Q(x,y) = 1$

Déf-Th. 15

Soit $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(E)^{\otimes\mathbb{N}})$ espace mesurable, et $X_i : E^{\mathbb{N}} \to E$ i^e projection.

Il existe une et une seule mesure $\mathbb{P}_\mu$ tq :

$\forall x_0, \dots, x_n \in E$, $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu(x_0) Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n)$

où : $\begin{cases} \mu \text{ mesure de proba sur } (E, \mathcal{P}(E)) \\ Q \text{ m.t} \end{cases}$

. Dans ce cadre, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle chaîne de Markov (abrégée c.M.) de m.t Q et de loi initiale μ.

. On note $\Theta_n : E^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$ le shift d'ordre n :

$$\Theta_n : (x_0, \dots, x_n, \dots) \mapsto (x_n, x_{n+1}, \dots).$$

$\mathcal{P}(E)^{\otimes\mathbb{N}}$-mesurable.

Déf-Prop. 16 :

Soit $Y_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to E$ suite de v.a. discrètes tq :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = x \,|\, \sigma(X_0, \dots, X_n)) = Q(X_n, x)$ où Q m.t

Alors : $Y_i \sim X_i$ où X_i comme au (15) sur l'espace $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(E)^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P}_\mu)$ où $\mu = \mathbb{P}_{Y_0}$.

Notations : • Si $\mu = \delta_x$, on notera $\mathbb{P}_x$ au lieu de $\mathbb{P}_{\delta_x}$.

• A Q m.t fixée, pour une v.a $Y : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, on notera $E_\mu[Y]$ l'espérance prise selon la mesure $\mathbb{P}_\mu$. On notera tjrs $E_x[Y]$ au lieu de $E_{\delta_x}[Y]$.

• On note
$$Q^n : \begin{cases} E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) \longmapsto \displaystyle\sum_{x_1, \dots, x_{n-1}} Q(x,x_1)Q(x_1,x_2) \dots Q(x_{n-1},y) \end{cases}$$
qui est tjrs une matrice de transition.

• $\mu \cdot Q$ désigne la mesure de proba sur $(E, \mathcal{P}(E))$:
$$\mu \cdot Q(x) = \sum_y \mu(y) Q(y,x).$$

Prop. 17 Si (X_n) est une C.M de $\begin{cases} \text{loi } \mu \\ \text{m.t } Q \end{cases}$, $X_n \sim \mu \cdot Q^n$.

Déf 18 • Q m.t est dite irréductible si $\forall x,y \in E$, $\exists n \geq 1$, $Q^n(x,y) > 0$.
Dans ce cas, pour $x \in E$, on note $\tau(x) = PGCD(\{n \in \mathbb{N} \mid Q^n(x,x)\})$.

Prop. 19 Si Q est une m.t irréd., alors $\exists d \geq 1$ tq $\forall x \in E$, $\tau(x) = d$.
d est appelé période de Q.

Déf 20. Q est apériodique si $d = 1$

2) Mesures invariantes, cas $|E| < \infty$.

Déf 21 Une mesure π de $(E, \mathcal{P}(E))$ est invariante par Q ssi $\pi \cdot Q = \pi$

Prop. 22 Si Q est irréd et π est invariante, alors : $\forall x \in E$, $\pi(x) > 0$

Th. 23 (Perron-Frobenius) Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ m.t irréd.
Alors : • toutes les v.p de Q sont de module ≤ 1
• 1 est v.p simple, $\exists v \in \mathbb{R}_+^n$, $\|v\|_1 = 1$ tq $Qv = v$ et $\mathrm{Ker}(Q - I) = \mathbb{R}v$

Cor. 24 • Si Q est une m.t sur E, $|E| < \infty$, irréd, alors $\exists$ une unique mesure de proba invariante par Q.
De plus, si Q est apériodique, $\forall \mu$, $\mu Q^n \xrightarrow{\text{Loi}} \varepsilon_v$ exponentiellement vite.

3) Temps d'arrêt et propriété de Markov

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; On se donne (X_n) C.M de m.t Q et de loi μ.

Déf 25 • On note $\mathcal{F}_n$ la σ-algèbre $\sigma(X_0, \dots, X_n)$
• On dit que $T : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ est un tps d'arrêt si $\forall n \geq 0$ $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.
• On appelle tribu du passé jusqu'à l'instant T
$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Ex 26 : $T \equiv n$: $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$. / $T_A = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in A\}$ / $T_x = \inf\{n \mid X_n = x\}$

Théorème 27 (Markov)
Soit T un temps d'arrêt. $\forall G : \Omega \to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{F}$-mesurable :
$$E_\mu[\mathbb{1}_{T<\infty} G \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{1}_{T<\infty} E_{X_T}[G]$$

4) Classification des états d'une chaîne de Markov.

Déf 28 On note, pour $x \in E$, $N_x = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{X_n = x}$
On dit que x est • récurrent si $N_x = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s
• transient si $N_x < \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s.
On définit la matrice de Green par
$$G : E \times E \to \overline{\mathbb{R}}_+, \ (x,y) \longmapsto E_x[N_y].$$

Prop 29 $\forall x,y \in E$, $G(x,y) = \sum_{n \geq 0} Q^n(x,y)$.

Théorème 30 Pour tout $x \in E$, on a 2 possibilités :
$\to$ soit x est récurrent $\iff N_x = +\infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s $\iff \mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1 \iff G(x,x) = \infty$
$\to$ soit x est transient $\iff N_x < \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s $\iff \mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1 \iff G(x,x) < \infty$
Et on a les formules pour G :
(1) $G(x,x) = 1/\mathbb{P}_x(T_x = \infty)$ $\forall x \in E$
(2) $G(x,y) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty) G(y,y)$ $\forall x \neq y \in E$

App. 31 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$: réc. si $d \in \{1,2\}$
transiente si $d \geq 3$

NTB