Les variables aléatoires considérées seront à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

## I. Variables aléatoires dans les espaces $L^p(\mathbb{P})$.

Dans cette partie : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, $d \in \mathbb{N}^*$.

**def 1 :** L'espérance d'une variable aléatoire (v.a.) ~~intégrable~~ $X$ est
$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} \quad (X \text{ positive ou intégrable})$$

**exemple 2 :** L'espérance d'un lancé de dé équilibré à 6 faces est $\frac{1+\dots+6}{6} = 7/2$.

**prop 3 :** $\mathbb{E}$ est linéaire avec $\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X] + b$.

**def 4 :** La variance d'une va réelle $X$ est
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \in [0, +\infty]$$
On pose $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$, l'écart-type de $X$.

**ex 5 :** La variance d'un lancé de dé équilibré à 6 face est 16, soit $\sigma_X = 4$.

**def 6 :**
- Si $\mathbb{E}[X] = 0$, on dit que $X$ est centrée.
- Si $\sigma_X = 1$, on dit que $X$ est réduite.

**prop 7 :** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

**ex 8 :** Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $\mathbb{E}[X] = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

**def 9 :** Une va réelle $X$ admet un moment d'ordre $p \in [1, +\infty[$ si $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$. On note alors $\mathbb{E}[X^p]$ le moment d'ordre $p$ de $X$.

**def 10 :** Si $X$ admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ dans le cas où $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment centré d'ordre $p$ la quantité $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^p]$.

**ex 11 :** Si $X$ suit la loi exponentielle sur $\mathbb{R}$, de paramètre 1, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ $X$ admet un moment d'ordre $n$ et $\mathbb{E}[X^n] = n!$.

**prop 12 (transfert) :** si $X$ admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ alors
$$\mathbb{E}[X^n] = \int_\mathbb{R} x^n \, d\mathbb{P}_X.$$

**prop 13 (inégalité de Markov)** $X$ va positive, $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$
$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[X^p]}{\alpha^p}.$$

**cor 14 :** (inégalité de Bienaymé – Tchebycheff) $X$ va réelle, $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

**def 15 :** Pour $p \in [1, +\infty[$, on note
$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R}^d \mid X \text{ admet un moment d'ordre } p\}/\sim$$
où $X \sim Y$ ~~ssi~~ $X = Y$ $\mathbb{P}$-p.s.

**prop 16 :** Si $q \geq p$, $L^q \subset L^p$

**prop 17 :** Pour $p, q > 1$ avec $1/p + 1/q = 1$, on a, pour $X, Y$ va réelles
$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \, \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}.$$
(L'inégalité de Hölder).

**cor 18 :** $L^p$ muni de $\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$ est ~~complet~~ un espace vectoriel.

**def 19 :** Si $X, Y \in L^1$, on définit la covariance de $X, Y$ par
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$
$X$ et $Y$ sont décorrélées lorsque $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

**prop 20 :** On a les formules
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- $\sigma^2_{X+Y} = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
- $\sigma^2_{aX+b} = a^2 \sigma_X$, $a, b \in \mathbb{R}$.

**def 21 :** On dit que $(X_n)_n$ converge vers $X$ dans $\mathcal{L}^p$, noté $X_n \xrightarrow{L^p} X$ si $X_n \in L^p$, $X \in L^p$ et $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \xrightarrow[n]{} 0$

**prop 22 :** Les $L^p$ sont complets et toute suite $L^p$ convergente admet une sous-suite qui converge p.s.

**prop 23 (inégalité de Jensen) :** $X$ va réelle, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, $\varphi \circ X \in L^1$.
$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

2/3

## II. Fonctions caractéristiques

**def 24** Si X est une va, la fonction caractéristique de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\varphi_X(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\langle X,\xi\rangle}]$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

**exemple 25** si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_X(\xi) = \exp(\lambda(e^{i\xi} - 1))$.

**thm 26** Soient X, Y deux va telles que $\varphi_X = \varphi_Y$. Alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

Développement 1

**prop 27.** Si X admet un moment d'ordre $m \in \mathbb{N}$ alors $\varphi_X$ est $C^m$ et pour $0 \leq k \leq m$, (X réelle)

$$\varphi_X^{(k)}(\xi) = i^k\, \mathbb{E}[X^k e^{i\xi X}]$$

- Réciproquement, si $\varphi_X$ est $k \in \mathbb{N}$ fois dérivable en 0, alors X admet des moments d'ordres entiers $\leq 2\lfloor k/2 \rfloor$. Et alors

$$\mathbb{E}[X^p] = (-i)^p \varphi_X^{(p)}(0) \qquad 0 \leq p \leq 2\lfloor k/2 \rfloor$$

**contre-exemple 28** Si X est une va réelle de loi $\mathbb{P}_X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_k$, $a_k = a_{-k}$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{N}} k a_k = +\infty$, alors

- $\varphi_X(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\mathbb{E}[|X|] = +\infty$ donc X n'admet pas de moment d'ordre 1.

**prop 29** Si X admet un moment d'ordre n, X réelle, alors le développement de Taylor de $\varphi_X$ en 0 est

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}[X^k] + \frac{(it)^n}{(n-1)!}\mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} e^{ituX} du\right]$$

**thm 30** X va dans $\mathbb{R}^d$, Y va dans $\mathbb{R}^{d'}$.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (\xi,\xi') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} \quad \varphi_{(X,Y)}(\xi,\xi') = \varphi_X(\xi)\varphi_Y(\xi')$$

**thm 31** Si X admet des moments de tout ordre entier avec

$$\limsup \frac{\mathbb{E}[|X|^n]^{1/n}}{n} = \frac{1}{R} < +\infty,$$

alors $\varphi_X$ est analytique, et en particulier au voisinage de 0

$$\forall t \in \left]-\frac{R}{e}, \frac{R}{e}\right[ \qquad \varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}[X^n]$$

**def 32** On note $I_X = \{t \in \mathbb{R} \mid e^{tX} \in L^1(\mathbb{P})\}$ et $L_X$ la fonction définie ~~sur~~ par $L_X(z) = \mathbb{E}[e^{zX}]$ où $|z| \in I_X$. C'est la transformée de Laplace de X, ou fonction génératrice des moments.

**remarque 33** si $X \leq 0$, ou X bornée, alors $I_X = \mathbb{R}$.

**prop 34** $I_X$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

- $L_X(0) = 1$
- Si $0 \in \mathring{I}_X$, alors au voisinage de 0

$$L_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^n]}{n!} z^n.$$

**remarque 35** Lorsque c'est bien défini, on a

$$L_X(i\xi) = \varphi_X(\xi).$$

Développement 2

**application 36** $d \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$, $(\theta_n)_n$ va. indépendantes de $\mathbb{Z}^d$ ~~vérifiant~~ suivant la loi uniforme dans $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$ où $(e_1, \dots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Alors la suite $(X_n)$ définie par

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_{n+1} = X_n + \theta_n, \ n \geq 0 \end{cases}$$

vérifie

$$\mathbb{P}(X_n = 0 \text{ une infinité de fois}) = 0.$$

## III. Théorèmes de convergence.

**déf 37** Une suite de va réelle $(X_n)_n$ converge en probabilité vers $X$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0$$

On note alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

**remarque 38** Si $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, alors $X = Y$ $\mathbb{P}$-p.s.

**prop 39** Toute suite convergeant en probabilité admet une sous suite qui converge p.s.

**déf 40** Une famille de va $\mathcal{F}$ est dite équiintégrable si

$$\lim_{a \to +\infty} \sup_{X \in \mathcal{F}} \int_{|X| > a} |X| \, d\mathbb{P} = 0$$

**remarque 41** Si $\mathcal{F}$ est uniformément bornée par un $X \in L^1(\mathbb{P})$, alors $\mathcal{F}$ est équiintégrable.

**thm 42** Soit $(X_n)_n \in (L^p)^{\mathbb{N}}$, $X \in L^p$. S'équivalent :

(i) $X_n \longrightarrow X$ dans $\mathcal{L}_p$

(ii) $(|X_n|^p)_n$ est équiintégrable et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

**thm 43** (loi forte des grands nombres) : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables identiques et indépendantes de $L^1$. Alors, $\mathbb{P}$-p.s.

$$\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{L^1,\ p.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

**thm 44** (loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_n$ une suite de va $L^2$, non corrélés telles que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_j] \longrightarrow m \qquad \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{X_j}^2 \longrightarrow 0.$$

Alors $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} m$

Références : Garcon, tome 1 et 2