CHANFI Dorian

Leçon 245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Réf : Ahlfors : Complex Analysis
Dolbeault : Analyse Complexe
Lax - Zalcman : Complex proofs of real theorems
Stein - Shakarchi : Complex Analysis

I / Intégrales curvilignes

1) Domaines du plan

Déf 1 : Une courbe paramétrée (ou un chemin) du plan est une application continue C^1 par morceaux $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ($a<b$ réels).
On dit que γ est fermé (ou un lacet) si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Si $p=\gamma(a)$ et $q=\gamma(b)$, on dit que γ va de p à q.
On appelle courbe géométrique l'image $\gamma([a,b])$.
On appelle longueur de γ la quantité $\mathrm{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$

Déf 2 : Une région est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.
Un domaine est un compact non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$ égal à l'adhérence de son intérieur et dont le bord est réunion finie de courbes géométriques fermées disjointes.

Prop 3 : Les composantes connexes d'un domaine sont des domaines connexes par arcs. Elles sont en nombre fini.

2) Intégrale le long d'une courbe

Déf 4 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ C^0. Si $\gamma : [a,b] \to U$ est une courbe, on définit l'intégrale de f le long de γ par $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$.

Ex 5 : Si $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$, alors $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

Prop 6 : Soit $f \in C^0(U,\mathbb{C})$, $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin et $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ un C^1-difféomorphisme. On a $\int_\gamma f(z)\,dz = \mathrm{sgn}(\varphi') \int_{\gamma\circ\varphi^{-1}} f(z)\,dz$.

Prop 7 : Soient $f,g \in C^0(U,\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin.
On a : $\int_\gamma (f+\lambda g)(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \lambda \int_\gamma g(z)\,dz$.

3) Intégrale sur le bord d'un domaine

Déf 8 : Soit Ω un domaine. On écrit $\partial\Omega = C_1 \cup \dots \cup C_n$. Si f est continue au voisinage de Ω, on note $\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f(z)\,dz$ où C_i est orientée de sorte que $\mathrm{Int}(\Omega)$ soit à gauche lors du parcours.
(D'après prop. 6, ceci détermine entièrement la valeur de $\int_{C_i} f(z)\,dz$)

II / Fonctions $\mathbb{C}$-dérivables

Déf 9 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$.
On dit que f est holomorphe ($\mathbb{C}$-dérivable) en z_0 si $z \mapsto \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ en z_0, alors notée $f'(z_0)$.
On dit que f est holomorphe sur U si f est holomorphe en tout point de U.
On note $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Ex 10 : Les fonctions constantes et l'identité sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Prop 11 : Si f est holomorphe en z_0, alors f est continue en z_0.

Prop 12 :
- Si f et g sont holomorphes en z_0, $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f+\lambda g$ et fg le sont. Si de plus $g(z_0) \neq 0$, alors f/g est holomorphe en z_0.
- Si $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$, si f est holomorphe en z_0 et g en $f(z_0)$, alors $g \circ f$ est holomorphe en z_0 et $(g\circ f)'(z_0) = f'(z_0)\,g'(f(z_0))$.

Cor 13 : Si U est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, alors $(\mathcal{O}(U),+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative unitaire contenant les fonctions polynomiales.
De plus, les fonctions ne s'annulant pas sont inversibles.

Prop 14 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$. On note $\begin{cases} P = \mathrm{Re}\, f \\ Q = \mathrm{Im}\, f \end{cases}$
On a l'équivalence : (f est holomorphe en z_0) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ est } \mathbb{R}\text{-différentiable} \\ \text{et } \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) \end{cases} \end{cases}$

Cor 15 : $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe

Cor 16 : Si $\mathcal{U}$ est convexe et $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathrm{Re} f$ est constante (ii) $\mathrm{Im} f$ est constante (iii) $\bar{f}$ est holomorphe (iv) f est constante

Prop 17 : Soit (a_n) une suite de complexes telle que la série entière $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence $\geq R > 0$.
Alors $F : \begin{array}{l} D(0,R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \end{array}$ est holomorphe sur $D(0,R)$.

Ex 18 : $\exp : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} \end{array}$; $\cos : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \end{array}$, $\sin : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{array}$
sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. $\ln(1+\cdot) : \begin{array}{l} D(0,1) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} \end{array}$ est holomorphe sur $D(0,1)$.

Prop 19 : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert et $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$. Soit γ un chemin de p à q.
On a $\int_\gamma f'(z)\,dz = f(q) - f(p)$.

Cor 20 : Si $\mathcal{U}$ est convexe et $f' \equiv 0$ sur $\mathcal{U}$, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.

Application 21 : $\forall z \in D(0,1)$ $\exp(\ln(1+z)) = 1+z$.

III / Analyticité des fonctions holomorphes

1) Formules intégrales de Cauchy.

Théorème 22 : Si f est holomorphe sur un ouvert contenant un domaine Ω, alors $\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$

Théorème 23 (représentation intégrale) : Si f est holomorphe sur un ouvert contenant un domaine Ω, alors pour tout $z \in \mathring{\Omega}$:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

2) Analyticité

Déf 24 : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. On dit que f est analytique si, pour tout $z_0 \in \mathcal{U}$, il existe $r > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ pour tout $z \in D(z_0, r)$.

Prop 25 : Si la série entière $f = \sum a_n (z - z_0)^n$ converge sur $D(z_0, r)$, alors elle est analytique sur $D(z_0, r)$, infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(z_0, r)$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Prop 26 : Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant un disque fermé $\bar{D}(z_0, r)$. On a, pour tout $z \in D(z_0, r)$:
$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n \text{ avec } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$$

Corollaire 27 : Toute fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ est analytique, donc infiniment $\mathbb{C}$-dérivable et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathcal{U}$, on a pour r suffisamment petit :
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(z, r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\,dw.$$

Corollaire 28 : Toute composée de séries entières convergentes est une série entière.

Corollaire 28 : Si une fonction f est holomorphe sur $D(z_0, R)$, alors le rayon de convergence de sa série de Taylor en z_0 est supérieur ou égal à R.

Application 29 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\rho(M) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$.
Alors $\|M^m\|^{1/m} \xrightarrow[m \to \infty]{} \rho(M)$ pour toute norme subordonnée $\|\cdot\|$.

Prop 30 (Morera) : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ continue. Si, pour tout triangle T inclus dans $\mathcal{U}$, on a $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$, alors f est holomorphe sur $\mathcal{U}$.

IV/ Théorème des zéros isolés

Théorème 31 : Soit f une fonction non identiquement nulle sur une région $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathcal{U}$, il existe un unique entier $d \in \mathbb{N}$ et une unique $g \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ telle que $\begin{cases} \forall z \in \mathcal{U} \ f(z) = (z-z_0)^d g(z) \\ g(z_0) \neq 0 \end{cases}$.

Corollaire 32 : L'ensemble des zéros de f non identiquement nulle est discret.
Corollaire 33 : Si $\mathcal{U}$ est une région, alors $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ est une algèbre intègre.
Corollaire 34 (Principe du maximum) : Soit f holomorphe sur une région $\mathcal{U}$. Si $|f|$ admet un maximum local sur $\mathcal{U}$, alors f est constante.

Corollaire 35 (Liouville) : Soit f holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée. f est constante.

Application 36 (D'Alembert-Gauss) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. P admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 37 (Schwarz) : Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ telle que $\begin{cases} f(D(0,1)) \subset D(0,1) \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

Dvp 1

- On a $|f'(0)| \leq 1$ avec égalité ssi f est une rotation de centre 0.
- On a $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D(0,1)$. S'il y a égalité en un point, f est une rotation de centre 0.

Application 38 : $\mathrm{Aut}(D(0,1)) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{a-z}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}, |a|<1 \right\}$

V/ Fonctions méromorphes

1.) Singularités

Théorème 39 : Soit f holomorphe sur un ouvert contenant la couronne fermée $\bar{A}(z_0, r_1, r_2) = \bar{D}(z_0, r_2) \setminus D(z_0, r_1)$. f est développable en série de Laurent sur cette couronne, i.e. on dispose de $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que : $\forall z \in \bar{A}(z_0, r_1, r_2)$, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$.

De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in]r_1, r_2[$, $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

Déf 40 : Une fonction holomorphe f a une singularité isolée si f est définie sur un voisinage épointé de z_0 (i.e. un $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$). On dit que la singularité est levable si f se prolonge holomorphiquement à z_0, un pôle si $|f| \xrightarrow[z_0]{} \infty$ et essentielle sinon.

Prop 41 : Si f a une singularité isolée en z_0, notons $\sum a_n (z-z_0)^n$ sa série de Laurent.

- z_0 est levable ssi $a_n = 0$ pour $n < 0$
- z_0 est un pôle ssi $a_n = 0$ pour $n \ll 0$
- z_0 est essentielle sinon.

Ex 42 : $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ a une singularité levable en 0, $z \mapsto \frac{1}{z}$ a un pôle en 0, $z \mapsto \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ a une singularité essentielle en 0.

Déf 43 : Soit $\mathcal{U}$ une région. Une fonction méromorphe est une fonction $f : \mathcal{U} \setminus D \to \mathbb{C}$ holomorphe, où D est un ensemble discret, telle que en chaque point de D, f ait un pôle.

Ex 44 : $\frac{1}{\sin}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ de pôles les $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Prop 45 : Les fonctions méromorphes sur une région forment un corps.

2) Formule des résidus

Déf 46 : Soit f holomorphe ayant une singularité isolée en z_0 et de série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$. On appelle résidu en z_0 de f le coefficient $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$.

Théorème 47 : Soit f méromorphe sur un ouvert contenant un domaine Ω, sans pôles sur $\partial\Omega$. Soient $z_1, \dots, z_n$ ses pôles dans $\mathring{\Omega}$. On a :
$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_i}(f)$$

Application 48 : Notons, pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$. Alors $\forall k \geq 1$, $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$ où (B_k) est défini par $\frac{X}{\exp X - 1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{B_k}{k!} X^k$.

Dvp 2

Théorème 49 : Soit f méromorphe sur un ouvert contenant un domaine Ω sur le bord duquel f n'a ni zéro ni pôle. Alors $\int_{\partial\Omega} \frac{f'}{f}(z)\, dz = \sum_{z \in f^{-1}(0) \cap \mathring{\Omega}} \deg_z(f) - \sum_{z \in (1/f)^{-1}(0) \cap \mathring{\Omega}} \deg_z(1/f)$

Corollaire 50 : Si f et g sont holomorphes sur un ouvert contenant un domaine Ω et si $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ sur $\partial\Omega$, alors f et g ont le même nombre de zéros dans $\mathring{\Omega}$.